Олимпиада школьников "Шаг в будущее"

Профиль: математика

Вариант: 1 Класс: 11

Задача 1 (12 *баллов*). Числа u, v, w являются корнями уравнения $x^3-3x-1=0$. Найдите $u^9+v^9+w^9$.

Задача 2 (16 *баллов*). В лаборатории имеются колбы двух размеров (объемом V и объемом $V/2$) в суммарном количестве 100 штук, причем колб каждого размера не менее трех. Лаборант поочередно случайно выбирает три колбы, и первую из них полностью заполняет 80-процентным раствором соли, вторую полностью заполняет 50-процентным раствором соли, а третью колбу полностью заполняет 20-процентным раствором соли. Затем он сливает содержимое этих трех колб в одну чашу и определяет процентное содержание соли в ней. При каком наименьшем количестве больших колб N событие «процентное содержание соли в чаше находится в пределах от 45% до 55% включительно» будет случаться реже события «при случайном бросании двух симметричных монет выпадает орел и решка (в любом порядке)»? Ответ обосновать.

Задача 3 (16 *баллов*). В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длины сторон AB и BC равны, DB – биссектриса угла ADC, $AD:DC=4:3$. Найдите косинус угла AKB, если K – точка пересечения диагоналей AC и BD, $BK:KD=1:3$.

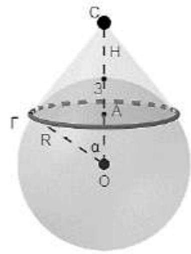
Задача 4 (16 *баллов*). Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases}(ay-ax+2)(4y-3|x-a|-x+5a)=0,\\ (\log_a x^2+\log_a y^2-2)\log_2 a^2=8\end{cases}$$

имеет ровно шесть различных решений.

Задача 5 (20 *баллов*). Шар радиуса $\frac{4}{9}$ лежит внутри правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ со стороной основания 8 и высотой 3. Этот шар касается плоскости основания $ABCD$ пирамиды и боковых граней SBC и SCD. Плоскость γ касается шара, проходит через точку B, середину K ребра CD и пересекает ребро SC в точке M. Найдите объем пирамиды $MBCK$.

Задача 6 (20 *баллов*). В 2022 году исполняется 65 лет запуска первого искусственного спутника Земли (ИСЗ). В настоящее время для обеспечения бесперебойной работы сотовой связи, систем теле и радиовещания используются различные виды спутников, находящихся на различных орбитах, на различных высотах.



Зоной покрытия спутника назовем часть поверхности земного шара, в пределах которой обеспечивается уровень сигналов к спутнику и от него, необходимый для их приема с заданным качеством в конкретный момент времени. Как правило, эта часть поверхности ограничивается окружностью, проходящей по линии видимого горизонта. На рисунке - линия проходит через точку Г.

а) Определите площадь земной поверхности (в *км*^{2}), которая является зоной покрытия спутника, находящегося на высоте $\mathrm{H}=500$ *км* относительно земной поверхности, считая ее сферой радиуса $\mathrm{R}=6400$ *км* с центром в точке O.

б) Найдите все значения $n>1$, для которых на поверхности земли можно расположить окружности C_1, ..., C_n, каждая из которых внешним образом касается окружности C_0, с центром в точке A и радиусом r < R, каждая из них является границей зоны покрытия ИСЗ, находящегося на той же высоте H, что и спутник с зоной покрытия C_0. Каждая из зон покрытия C_i должна внешним образом касаться окружностей C_0 и C_{i+1}, $i=0,1,\dots,n-1$, т.е. первая касается C_0 и C_2, вторая - C_0 и C_3, и т.д. Окружность C_n должна касаться C_0 и C_1.

Решение варианта №1 (Математика - 11 класс)

1. Числа u, v, w являются корнями уравнения $x^3-3x-1=0$. Найдите $u^9+v^9+w^9$. (12 баллов)

Решение. Согласно теореме Виета, $u+v+w=0,\ uv+vw+vw=-3, uvw=1$. Рассмотрим последовательность $S_n=u^n+v^n+w^n$. Имеем $S_0=3,\ S_1=0$. Найдем S_2: S_2=$u^2+v^2+w^2=(u+v+w)^2-2(uv+vw+vw)=6$. Поскольку $u^3=3u+1, v^3=3v+1,\ w^3=3w+1$, то S_3=$u^3+v^3+w^3=3S_1+S_0$. Далее $u^n=3u^{n-2}+u^{n-3}, v^n=3v^{n-2}+v^{n-3},\ w^n=3w^{n-2}+w^{n-3}$, то $S_n=3S_{n-2}+S_{n-3}$. Находим $S_3=3, S_4=18,\ S_5=15, S_6=57, S_7=63,\ S_9=246$.

Ответ: 246

2. В лаборатории имеются колбы двух размеров (объемом V и объемом $V/2$) в суммарном количестве 100 штук, причем колб каждого размера не менее трех. Лаборант поочередно случайно выбирает три колбы, и первую из них полностью заполняет 80-процентным раствором соли, вторую полностью заполняет 50-процентным раствором соли, а третью колбу полностью заполняет 20-процентным раствором соли. Затем он сливает содержимое этих трех колб в одну чашу и определяет процентное содержание соли в ней. При каком наименьшем количестве больших колб N событие «процентное содержание соли в чаше находится в пределах от 45% до 55% включительно» будет случаться реже события «при случайном бросании двух симметричных монет выпадает орел и решка (в любом порядке)»? Ответ обосновать. (16 баллов)

Решение. Если N — имеющееся количество больших колб в лаборатории, $N = 3, 4, \ldots, 97$, то $n = 100 - N$ — имеющееся количество малых колб в лаборатории, $n = 3, 4, \ldots, 97$. Для события A = {содержание соли в чаше находится в пределах от 45% до 55% включительно} необходимо найти такое наименьшее N, что вероятность $\mathrm{P}(A) < ½$.

Мысленно перенумеруем все имеющиеся в лаборатории колбы — присвоим им личные номера от 1 до 100. И тогда равновероятными исходами этого эксперимента будут упорядоченные тройки различных личных номеров последовательно выбираемых лаборантом колб: $\omega = (i_1, i_2, i_3)$, $i_j \in \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, $i_j \neq i_k$, $j, k = 1, 2, 3$. Общее количество таких исходов равно $100 \cdot 99 \cdot 98$.

Вычислим теперь количество благоприятных исходов для появления события A. Рассмотрим следующие случаи, определяемые размерными типами выбранных колб.

1) Лаборант выбирает три большие колбы - тип [Б, Б, Б]. Тогда процентное содержание соли в чаше в результате описанных манипуляций лаборанта окажется равным величине: $\frac{(0{,}8V+0{,}5V+0{,}2V)100}{3V}=50\% \in$ [45%; 55%]. Такой выбор **благоприятствует** появлению события A. Количество элементарных исходов данного типа, очевидно, равно $N\cdot(N-1)\cdot(N-2)$.
2) Лаборант выбирает три маленькие колбы - тип [м, м, м]. Процентное содержание соли в чаше: $\frac{(0{,}8V/2+0{,}5V/2+0{,}2V/2)100}{3V/2}=50\% \in$ [45%; 55%]. Такой выбор **благоприятствует** появлению события A. Количество исходов в этом случае равно $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)$.
3) Лаборант выбирает сначала две большие колбы, затем маленькую - тип [Б, Б, м]. Процентное содержание соли в чаше: $\frac{(0{,}8V+0{,}5V+0{,}2V/2)100}{5V/2}=56\% \notin$ [45%; 55%]. Такой выбор не благоприятствует появлению события A.

4) Лаборант выбирает последовательно большую, малую и большую колбы -тип [Б, м, Б]. Процентное содержание соли в чаше: $\frac{(0{,}8V+0{,}5V/2+0{,}2V)100}{5V/2} = 50\% \in [45\%;\ 55\%]$. Такой выбор **благоприятствует** появлению события A. Количество элементарных исходов в этом случае равно $N \cdot n \cdot (N-1)$.
5) Лаборант выбирает сначала малую колбу, затем две большие колбы - тип [м, Б, Б]. Процентное содержание соли в чаше: $\frac{(0{,}8V/2+0{,}5V+0{,}2V)100}{5V/2} = 44\% \notin [45\%;\ 55\%]$. Такой выбор не благоприятствует появлению события A.
6) Лаборант выбирает сначала две малые колбы, затем большую колбу - тип [м, м, Б]. Процентное содержание соли в чаше: $\frac{(0{,}8V/2+0{,}5V/2+0{,}2V)100}{2V} = 42{,}5\% \notin [45\%;\ 55\%]$. Такой выбор не благоприятствует появлению события A.
7) Лаборант выбирает последовательно малую, большую и малую колбы - тип [м, Б, м]. Процентное содержание соли в чаше: $\frac{(0{,}8V/2+0{,}5V+0{,}2V/2)100}{2V} = 50\% \in [45\%;\ 55\%]$. Такой выбор **благоприятствует** появлению события A. Количество элементарных исходов в этом случае равно $n \cdot N \cdot (n-1)$.
8) Лаборант выбирает сначала большую, затем две малые колбы - тип [Б, м, м]. Процентное содержание соли в чаше: $\frac{(0{,}8V+0{,}5V/2+0{,}2V/2)100}{2V} = 57{,}5\% \notin [45\%;\ 55\%]$. Такой выбор не благоприятствует появлению события A.

Вычисляем вероятность события A (по формуле классической вероятности):

$$P(A) = \frac{N\cdot(N-1)\cdot(N-2)+n\cdot(n-1)\cdot(n-2)+N\cdot n\cdot(N-1)+ n\cdot N\cdot(n-1)}{100\cdot 99\cdot 98} = \frac{N^3+n^3-3N^2-3n^2+2(N+n)+98Nn}{100\cdot 99\cdot 98} =$$
$$\frac{100(N^2-Nn+n^2)-3N^2-3n^2+200+98Nn}{100\cdot 99\cdot 98} = \frac{97(N^2+n^2)+200-2Nn}{100\cdot 99\cdot 98} = \frac{97(N+n)^2+200-196Nn}{100\cdot 99\cdot 98} =$$
$$\frac{970200-196N(100-N)}{100\cdot 99\cdot 98} = \frac{N^2-100N+4950}{4950} = \frac{(N-50)^2+2450}{4950}.$$

Отсюда имеем $P(A) = \frac{(N-50)^2+2450}{4950} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 45 < N < 55$. И значит, $N_{\min} = 46$.

Ответ: при $N = 46$.

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длины сторон AB и BC равны, DB – биссектриса угла ADC, $AD:DC = 4:3$. Найдите косинус угла AKB, если K – точка пересечения диагоналей AC и BD, и $BK:KD = 1:3$. (16 баллов)

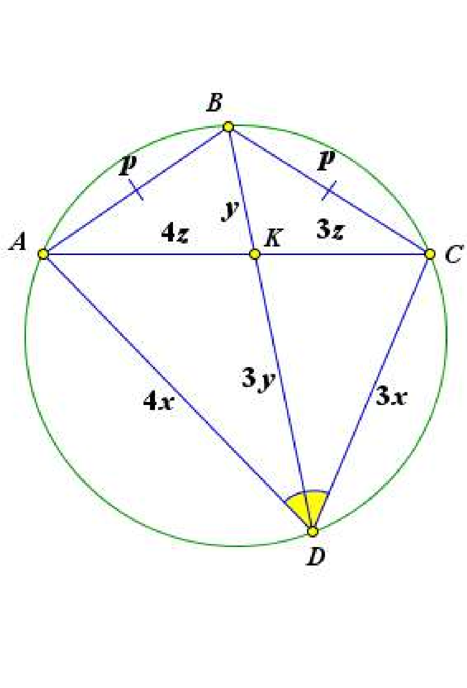
Решение.

1) $AD:DC = 4:3$, пусть $AD = 4x, DC = 3x$,

$BK:KD = 1:3$, пусть $BK = y, KD = 3y$.

2) DK – биссектриса треугольника ADC,

$AK:KC = AD:DC = 4:3$, $AK = 4z, KC = 3z$.



3) Точка B является точкой пересечения серединного перпендикуляра к диагонали AC и биссектрисы угла D в выпуклом четырехугольнике $ABCD$. Следовательно, около этого четырехугольника можно описать окружность.

Действительно, опишем окружность около треугольника ACD, обозначим точку пересечения биссектрисы угла D с окружностью через B_1. Тогда по свойству вписанных углов дуги AB_1 и B_1C будут равны, хорды AB_1 и B_1C тоже будут равны, треугольник AB_1C будет равнобедренным, и серединный перпендикуляр к диагонали AC и биссектриса угла D будут пересекаться в точке B_1. Следовательно, $B_1 = B$.

4) Поскольку около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность, то для его диагоналей верно равенство $AK \cdot KC = BK \cdot KD$, $4z^2 = y^2, y = 2z$.

5) Треугольник ABK подобен DCK, и $\frac{AB}{CD} = \frac{BK}{KC}$, пусть $AB = p$, $\frac{p}{3x} = \frac{y}{3z} = \frac{2}{3}$, $p = 2x$, $x = \frac{p}{2}$.

6) $AD = 2p, DC = \frac{3p}{2}$.

7) По теореме косинусов для треугольников ABC и ADC с учетом $\angle B + \angle D = 180°$ имеем

$49z^2 = 2p^2 - 2p^2\cos\angle B, 49z^2 = 4p^2 + \frac{9p^2}{4} + 6p^2\cos\angle B$. Отсюда $z = \frac{p}{4}, y = \frac{p}{2}, AK = p, BK = \frac{p}{2}$.

9) Для равнобедренного треугольника ABK имеем $\cos\angle AKB = \frac{BK}{2AK} = \frac{1}{4}$.

Ответ: $1/4$.

4. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases}(ay - ax + 2)(4y - 3|x - a| - x + 5a) = 0,\\ (\log_a x^2 + \log_a y^2 - 2)\log_2 a^2 = 8\end{cases}$$

имеет шесть различных решений. (16 баллов)

Решение. Упростим второе уравнение системы: $(\log_a x^2 + \log_a y^2 - 2)\log_2 a^2 = 8 \Leftrightarrow a > 0,\ a \neq 1,\ \log_a x^2y^2 = 2 + 4\log_a 2,\ |xy| = 4a$. Имеем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} ay - ax + 2 = 0,\\ |xy| = 4a,\ \ a > 0, a \neq 1,\end{cases}\\ \begin{cases}4y - 3|x - a| - x + 5a = 0,\\ |xy| = 4a,\ \ a > 0, a \neq 1,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y = x - 2/a\,,\\ |xy| = 4a,\ \ a > 0, a \neq 1,\end{cases}\\ \begin{cases}y = 3|x - a|/4 + x/4 - 5a/4\,,\\ |xy| = 4a,\ \ a > 0, a \neq 1.\end{cases}\end{array}\right.$$

I. $\begin{cases} y = x - 2/a\,,\\ |xy| = 4a,\ \ a > 0, a \neq 1.\end{cases}$

1) Система имеет 2 различных решения, если

$$\frac{2}{a} < 4\sqrt{a},\ \ a > \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, a \neq 1.$$

Найдем эти решения:

$x - \frac{2}{a} = \frac{4a}{x}, x^2 - \frac{2}{a}x - 4a = 0,$

$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a^3}}{a}, y_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4a^3}}{a}.$

2) Система имеет 3 различных решения, если

$$\frac{2}{a} = 4\sqrt{a},\ \ a = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

Найдем эти решения:

$x_{1/2} = \frac{1\pm\sqrt{1+4a^3}}{a}$, $y_{1/2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+4a^3}}{a}$,

$$x_3 = 2\sqrt{a}, y_3 = -2\sqrt{a}.$$

3) Система имеет 4 различных решения, если

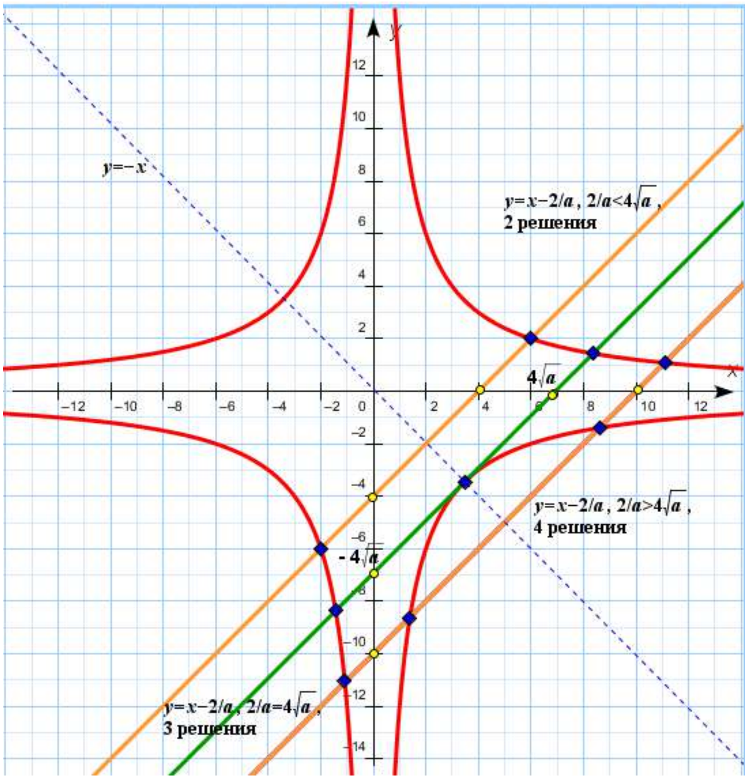
$$\frac{2}{a} > 4\sqrt{a},\ \ 0 < a < \frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

Найдем эти решения:

$x - \frac{2}{a} = \frac{4a}{x}, x^2 - \frac{2}{a}x - 4a = 0,\ x_{1/2} = \frac{1\pm\sqrt{1+4a^3}}{a}, y_{1/2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+4a^3}}{a}.$

$x - \frac{2}{a} = -\frac{4a}{x}, x^2 - \frac{2}{a}x + 4a = 0,$

$x_{3/4} = \frac{1\pm\sqrt{1-4a^3}}{a}, y_{3/4} = \frac{-1\pm\sqrt{1-4a^3}}{a}.$



II. $\begin{cases} y = 3|x-a|/4 + x/4 - 5a/4, \\ |xy| = 4a,\ \ a > 0, a \neq 1. \end{cases}$

$y = 3|x-a|/4 + x/4 - 5a/4,$

при $x \geq a$ имеем $y = x - 2a$, при $x \leq a$ имеем $y = -\frac{x+a}{2}$.

1) Система имеет 2 различных решения, если

$$2a < 4\sqrt{a},\ \ a < 4, a \neq 1.$$

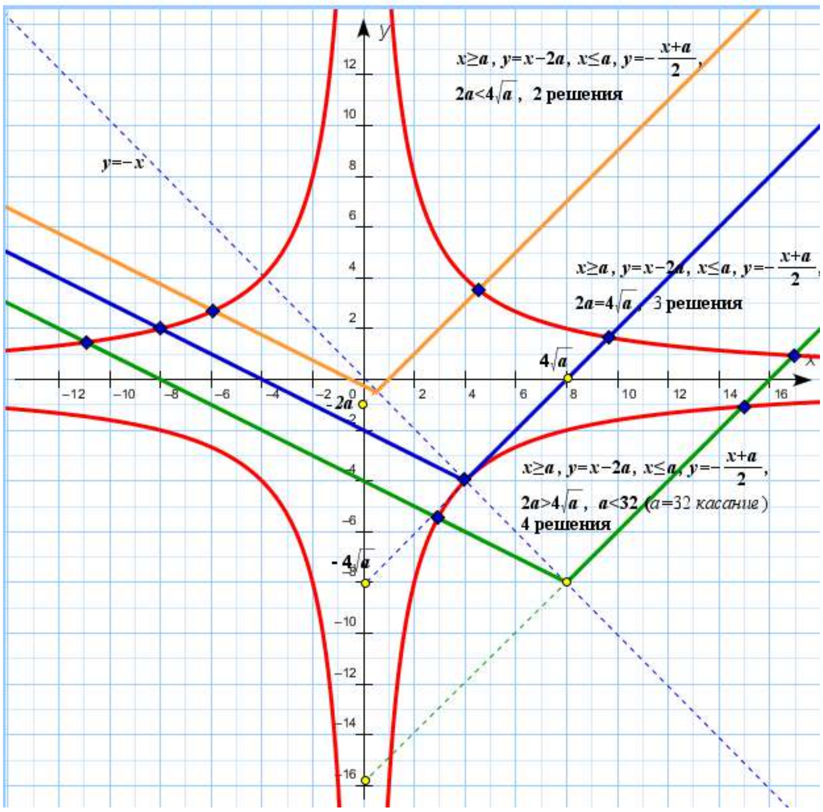
Найдем эти решения:

$x - 2a = \frac{4a}{x}, x^2 - 2ax - 4a = 0,$

правый корень $x_1 = a + \sqrt{a^2+4a}$,

$y_1 = -a + \sqrt{a^2+4a}$;

$-\frac{x+a}{2} = -\frac{4a}{x}, x^2 + ax - 8a = 0$, левый корень $x_2 = \frac{-a-\sqrt{a^2+32a}}{2}$, $y_2 = \frac{-a+\sqrt{a^2+32a}}{4}$.



2) Система имеет 3 различных решения, если

$$2a = 4\sqrt{a}, \ \ a = 4.$$

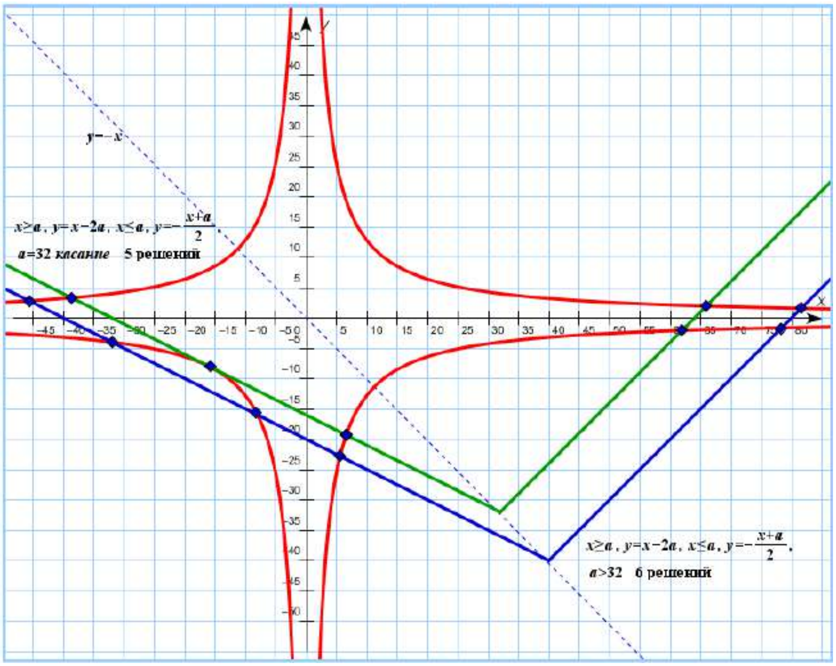
Найдем эти решения:

$x_1 = a + \sqrt{a^2 + 4a},$

$y_1 = -a + \sqrt{a^2 + 4a};$

$x_2 = \frac{-a-\sqrt{a^2+32a}}{2}, y_2 = \frac{-a+\sqrt{a^2+32a}}{4}.$

$$x_3 = 2\sqrt{a}, y_3 = -2\sqrt{a}.$$



3) Найдем значение параметра $a > 0$, при котором прямая $y = -\frac{x+a}{2}$ будет касаться графика гиперболы $y = \frac{4a}{x}$.

$$-\frac{x+a}{2} = \frac{4a}{x}, x^2 + ax + 8a = 0,$$

$D = a(a - 32) = 0, a = 32$. Тогда при $4 < a < 32$ система будет иметь 4 решения: $x_1 = a + \sqrt{a^2 + 4a},$

$y_1 = -a + \sqrt{a^2 + 4a};$

$x_{2/3} = \frac{-a\pm\sqrt{a^2+32a}}{2}, y_{2/3} = \frac{-a\mp\sqrt{a^2+32a}}{4}.$ Найдем четвертое решение:

$x - 2a = -\frac{4a}{x}, x^2 - 2ax + 4a = 0,$ правый корень $x_4 = a + \sqrt{a^2 - 4a}, y_4 = -a + \sqrt{a^2 - 4a}.$

4) При $a = 32$ система будет иметь 5 различных решений:

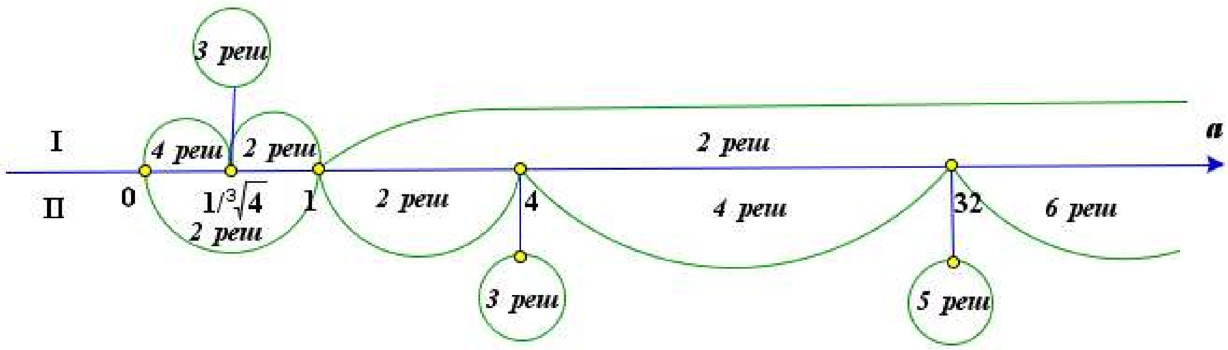
$x_1 = a + \sqrt{a^2 + 4a}, y_1 = -a + \sqrt{a^2 + 4a};\ x_{2/3} = \frac{-a\pm\sqrt{a^2+32a}}{2}, y_{2/3} = \frac{-a\mp\sqrt{a^2+32a}}{4},$

$x_4 = a + \sqrt{a^2 - 4a}, y_4 = -a + \sqrt{a^2 - 4a},\ x_5 = -a/2, y_5 = -a/4.$

5) Система имеет 6 различных решений при $a > 32$:

$x_1 = a + \sqrt{a^2 + 4a}, y_1 = -a + \sqrt{a^2 + 4a};\ x_{2/3} = \frac{-a\pm\sqrt{a^2+32a}}{2}, y_{2/3} = \frac{-a\mp\sqrt{a^2+32a}}{4},$

$x_4 = a + \sqrt{a^2 - 4a}, y_4 = -a + \sqrt{a^2 - 4a},\ x_{5/6} = \frac{-a\pm\sqrt{a^2-32a}}{2}, y_{5/6} = \frac{-a\mp\sqrt{a^2-32a}}{4}.$



Возможны следующие случаи совпадения решений в I и II случаях:

1) $x - \frac{2}{a} = x - 2a, a = 1,$ в этом случае нет решений;

2) прямые $y = x - \frac{2}{a}$, $y = -\frac{x+a}{2}$ и гипербола $y = \frac{4a}{x}$ пересекаются в одной точке, но этот случай возможен при $a > 32$, и в этом случае будет 7 решений.

Ответ: $a \in (0;\ 1/\sqrt[3]{4}) \cup (4; 32)$,

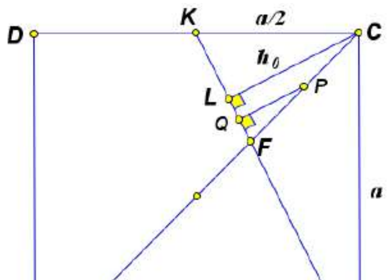
5. Шар радиуса $\frac{4}{9}$ лежит внутри правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ со стороной основания 8 и высотой 3. Этот шар касается плоскости основания $ABCD$ пирамиды и боковых граней SBC и SCD. Плоскость γ касается шара, проходит через точку B, середину K ребра CD и пересекает ребро SC в точке M. Найдите объем пирамиды $MBCK$. (20 баллов)

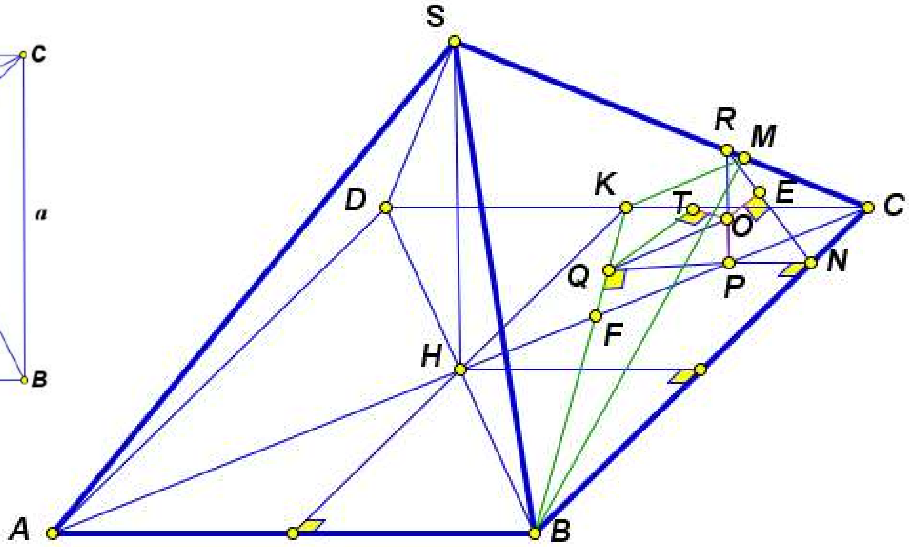
Решение. Поскольку пирамида $SABCD$ правильная, то центр O указанного шара лежит в плоскости SHC, где SH – высота пирамиды. Пусть $RP \parallel SH, R \in SC, P \in HC, O \in RP$. Обозначим $SH = h, AB = a,\ RP = kh$. Проведем $PN \parallel AB, N \in BC$. E – точка касания шара плоскости SBC, пусть радиус шара $OE = r$. Поскольку $PC{:}\,HC = k$, то $PN = ka/2$. Треугольники ROE и RPN подобны, и $OE{:}\,PN = RO{:}\,RN$, или

$$\frac{r}{ka/2} = \frac{kh - r}{k\sqrt{h^2 + (a/2)^2}}, \qquad \frac{r}{a} = \frac{kh - r}{\sqrt{4h^2 + a^2}}, \qquad k = \frac{r}{h}\left(\frac{\sqrt{4h^2 + a^2}}{a} + 1\right).$$

По условию задачи $a = 8, h = 3, r = 4/9$. Тогда $k = 1/3$.

Точка F – точка пересечения AC и BK, тогда $FC = AC/3$. Поскольку $PC = kHC = HC/3 = AC/6\,, FP = PC$.

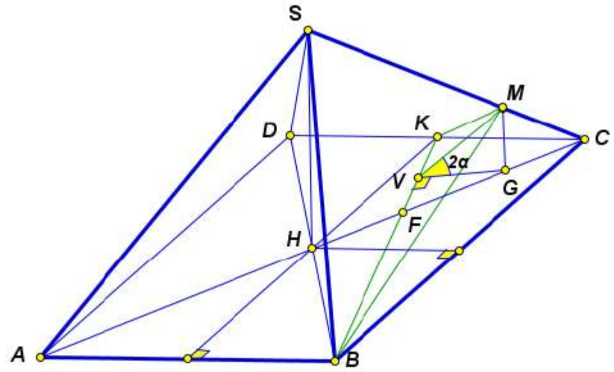




Пусть $PQ \perp BK$.
Тогда $PQ = \frac{a}{2\sqrt{5}}$.

Если $\alpha = \angle OQP$, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{r2\sqrt{5}}{a} = \frac{\sqrt{5}}{9}$. Угол между плоскостью γ и плоскостью основания равен 2α. Тогда $\operatorname{tg}2\,\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{4\sqrt{5}ar}{a^2-20r^2} = \frac{9\sqrt{5}}{38}$.

Пусть MG – отрезок перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость основания ABC, и $MG = nh$. Тогда $CG = nCH$. Если $GV \perp BK$, то $GV = \frac{GF}{CF}h_0 = \frac{AC/3 - nAC/2}{AC/3}h_0 = \frac{2-3n}{2}h_0$, $h_0 = \frac{a}{\sqrt{5}}$ – высота треугольника BCK, проведенная из вершины C.



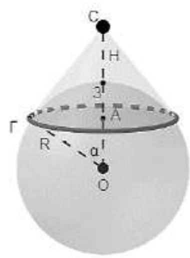
$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2nh\sqrt{5}}{(2-3n)a}, n = \frac{4ra^2}{(h+6r)a^2 - 20hr^2} = \frac{12}{37}.$$

$$V_{MBCK} = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{4}nh = \frac{192}{37}.$$

Ответ: $\frac{192}{37}$

6. В 2022 году исполняется 65 лет запуска первого искусственного спутника Земли (ИСЗ). В настоящее время для обеспечения бесперебойной работы сотовой связи, систем теле и радиовещания используются различные виды спутников, находящихся на различных орбитах, на различных высотах.

Зоной покрытия спутника назовем часть поверхности земного шара, в пределах которой обеспечивается уровень сигналов к спутнику и от него, необходимый для их приема с заданным качеством в конкретный момент времени. Как правило, эта часть поверхности ограничивается окружностью, проходящей по линии видимого горизонта. На рисунке - линия проходит через точку Г.

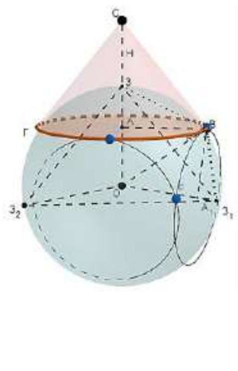


а) Определите площадь земной поверхности (в *км*²), которая является зоной покрытия спутника, находящегося на высоте $\mathrm{H} = 500$ *км* относительно земной поверхности, считая ее сферой радиуса $\mathrm{R} = 6400$ *км* с центром в точке О.

б) Найдите все значения $n > 1$, для которых на поверхности земли можно расположить окружности C_1, ..., C_n, каждая из которых внешним образом касается окружности C_0, с центром в точке А и радиусом $r < \mathrm{R}$, каждая из них является границей зоны покрытия ИСЗ, находящегося на той же высоте Н, что и спутник с зоной покрытия C_0. Каждая из зон покрытия C_i должна внешним образом касаться окружностей C_0 и C_{i+1}, $i = 0,1,\ldots,n-1$, т.е. первая касается C_0 и C_2, вторая - C_0 и C_3, и т.д. Окружность C_n должна касаться C_0 и C_1. (20 баллов)

Решение. а) Зона покрытия – часть сферы, лежащая внутри конуса.

$S = 2\pi R\cdot h$, где h=АЗ - высота сегмента. $h = R - R\cos\alpha$, здесь угол α - угол между радиусом ОГ и линией ОА, соединяющий центр сферы с центром окружности, которая является линией пересечения сферы и конуса.

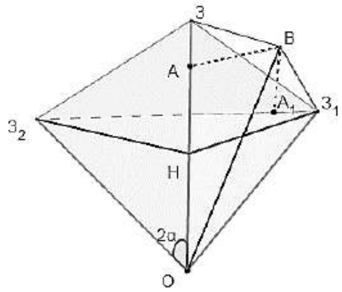


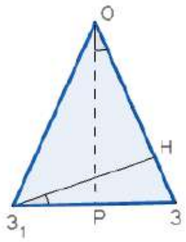
Тогда площадь равна

$$S = 2\pi R^2(1-\cos\alpha) = 2\pi R^2(1-\frac{R}{R+H}) = 2\pi R^2\cdot\frac{H}{R+H} \approx$$

$$\approx 6\cdot 6400^2\cdot\frac{500}{6900} = 6400^2\cdot\frac{10}{23} \approx \frac{4096}{23}\cdot 10^5 \approx 178,09\cdot 10^5 = 17809000 \text{ км}^2.$$

б) Пусть О – центр сферы, В – точка касания первой и второй окружности, А и A_1 их центры этих окружностей, З, $З_1$, $З_2$ – точки пересечения радиусов R со сферой. Обозначим α - угол между ОЗ и ОВ. Тогда $\sin\alpha = \dfrac{r}{R}$, ЗЗ$_1$=2$r$. В правильной пирамиде ОЗЗ$_1$З$_2$ плоские углы при вершине равны 2α, двугранный угол при ребре ОЗ равен 360/n . Опустив перпендикуляры из точек З$_1$ и З$_2$ на ребро ОЗ в точку Н, треугольники ОЗЗ$_1$ и ОЗЗ$_2$ равны (по трем сторонам), т.к. две стороны равны R, а третья 2r.





$$HЗ_1 = HЗ_2 = 2r\cos\alpha = 2r\sqrt{1-\sin^2\alpha} = 2r\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}$$

$\Rightarrow\ 2r = ЗЗ_1 = З_1З_2 = 2\cdot З_1H\cdot\sin(180/n) = 4r\sqrt{1-\dfrac{r^2}{R^2}}\sin(180/n)$. Следовательно,

$$2\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\sin(180/n) = 1 \quad\Rightarrow\quad \sin(180/n) = 1/(2\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}) > 1/2 \ \Rightarrow n < 6.$$

Ответ: а) 17809000,
б) 2, 3, 4, 5.

Олимпиада школьников "Шаг в будущее"

Профиль: математика

Вариант: 4 Класс: 11

Задача 1 (12 *баллов*). Числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ задается так, что $a_1 = \log_2(\log_2 f(2))$, $a_2 = \log_2(\log_2 f(f(2)))$, … , $a_n = \log_2(\log_2 \underbrace{f(f(\dots f}_{n}(2))))$, … , где $f(x) = x^x$. Определите номер n, для которого $a_n = 2059 + 2^{2059}$.

Задача 2 (16 *баллов*). У клоунов Плюха и Шмяка на двоих шесть пар валенок. Каждая пара валенок выкрашена в свой особый цвет, и валенки в паре абсолютно одинаковы (не разделяются на левый и правый). Сколькими способами оба клоуна одновременно могут быть обуты в непарные валенки?

Задача 3 (16 *баллов*). Точка M принадлежит катету AC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C, причем $AM = 2$, $MC = 6$. Отрезок MH – высота треугольника AMB. Точка D расположена на прямой MH так, что угол ADB равен $90°$, и точки C и D лежат по одну сторону от прямой AB. Найдите длину отрезка DC, если тангенс угла ACH равен $1/7$.

Задача 4 (16 *баллов*). Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} (a|\log_2 y| + a\,|\log_2 x| - 2)((\log_2 x)^2 + (\log_2 y)^2 - 48a^2) = 0, \\ (\log_a x)^2(\log_a y)^2(\log_2 a^2)^4 = 256a^2 \end{cases}$$

имеет ровно восемь различных решений.

Задача 5 (20 *баллов*). Внутри правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ расположена правильная четырехугольная призма $KLMNK_1L_1M_1N_1$, основание $KLMN$ которой лежит в плоскости ABC. Центр основания $KLMN$ призмы расположен на отрезке AC, $KL \parallel AC$, $KN \parallel BD$ (точки K и B лежат по одну сторону от AC), сторона основания призмы равна 2, боковое ребро KK_1 призмы равно 1. Вершины L_1 и M_1 верхнего основания призмы $KLMNK_1L_1M_1N_1$ принадлежат боковым граням SBC и SCD пирамиды $SABCD$ соответственно. Плоскость γ проходит через точки B, K_1 и N_1. Найдите объемы частей, на которые делит пирамиду $SABCD$ плоскость γ, если сторона основания пирамиды равна $8\sqrt{2}$, а её высота равна 4.

Задача 6 (20 *баллов*). Все больше стран осваивают космос. Государств, которые запускают свои спутники собственными ракетоносителями – уже 12. А есть еще страны, которые пользуются услугами основных космических держав для запуска своих спутников в народнохозяйственных целях. Из-за роста числа участников космической деятельности и увеличения ее интенсивности встают вопросы обеспечения безопасности космических операций. Так, например, NASA обратилась к корпорации «Энергия» с просьбой уменьшить высоту орбиты МКС.

а) Считая Землю шаром радиуса R, определите, какое наибольшее количество спутников одновременно может находиться на орбитах вокруг Земли на одной и той же высоте H от ее поверхности так, чтобы расстояние между аппаратами было больше $\sqrt{2}(R+H)$.

б) Для найденного максимального количества спутников указать координаты возможного их расположения в системе координат с началом в центре Земли и осью абсцисс, направленной вдоль вектора, соединяющего центр Земли с одним из спутников.

Решение варианта №4 (Математика - 11 класс)

1. Числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ задается так, что $a_1 = \log_2(\log_2 f(2))$, $a_2 = \log_2(\log_2 f(f(2)))$, … , $a_n = \log_2(\log_2 \underbrace{f(f(\dots f}_{n}(2))))$, …, где $f(x) = x^x$. Определите номер n, для которого $a_n = 2059 + 2^{2059}$. (12 баллов)

Решение.

Если $\log_2(\log_2 u) = t$, то $u = 2^{2^t}, f(u) = \left(2^{2^t}\right)^{2^{2^t}} = 2^{2^{t+2^t}}$, $\log_2(\log_2 f(u)) = t + 2^t$. Если $u = 2$, $2 = 2^{2^t}, t = 0, a_1 = \log_2(\log_2 f(2)) = 0 + 2^0 = 1.$ Если $u = f(2)$, то $t = \log_2(\log_2 u) = 1$, и $a_2 = \log_2(\log_2 f(f(2))) = \log_2(\log_2 f(u)) = t + 2^t = 1 + 2^1 = 3$. Если $u = f(f(2))$, то $t = \log_2(\log_2 u) = 3$, и $a_3 = \log_2(\log_2 f(f(f(2)))) = \log_2(\log_2 f(u)) = t + 2^t = 3 + 2^3 = 11$.
Если $u = f(f(f(2)))$, то $t = \log_2(\log_2 u) = 11$, и
$a_4 = \log_2(\log_2 f(f(f(f(2))))) = \log_2(\log_2 f(u)) = t + 2^t = 11 + 2^{11} = 2059$.
Если $u = f(f(f(f(2))))$, то $t = \log_2(\log_2 u) = 2059$, и
$a_5 = \log_2(\log_2 f(f(f(f(f(2)))))) = \log_2(\log_2 f(u)) = 2059 + 2^{2059}$.

Ответ: 5

2. У клоунов Плюха и Шмяка на двоих шесть пар валенок. Каждая пара валенок выкрашена в свой особый цвет, и валенки в паре абсолютно одинаковы (не разделяются на левый и правый). Сколькими способами оба клоуна одновременно могут быть обуты в непарные валенки? (16 баллов)

Решение. Можно использовать валенки из двух, трех или четырех пар.
1) Выбираем две пары валенок $C_6^2 = 15$ способами. Каждый клоун надевает по валенку из разных пары, выбирая какой на какую ногу. Получаем $15 \cdot 2 \cdot 2 = 60$ способов.

2) Используем три пары валенок. Выбираем одну целую пару валенок, и две другие пары, из которых будем брать по одному валенку. Это можно сделать $6 \cdot C_5^2 = 60$ способами. Каждый клоун надевает один валенок из пары, выбирая на какую ногу надеть. Это можно сделать 4 способами. Далее каждый клоун выбирает один из двух разных валенок двумя способами. Получаем $60 \cdot 4 \cdot 2 = 480$ способов.

3) Используем четыре пары валенок. Выбираем четыре пары. Из которых будем брать по одному валенку. Это можно сделать $C_6^4 = 15$ способами. Выбранные четыре валенка разного цвета можно надеть на четыре ноги клоунов 4! способами. Получаем $15 \cdot 4! = 360$ способов.

Окончательно имеем $60 + 480 + 360 = 900$.

Ответ: 900.

3. Точка M принадлежит катету AC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C, причем $AM = 2$, $MC = 6$. Отрезок MH – высота треугольника AMB. Точка D расположена на прямой MH так, что угол ADB равен $90°$, и точки C и D лежат по одну сторону от прямой AB. Найдите длину отрезка DC, если тангенс угла ACH равен $1/7$. (16 баллов)

Решение. 1. Около четырехугольника *ABCD* можно описать окружность с диметром *AB* (углы *ADB* и *ACB* прямые). Тогда $\angle ABD=\angle ACD, \angle HAD=90°-\angle ABD, \angle ADH=\angle ABD=\angle ACD.$

Треугольники *ACD* и *ADM* подобны, и $\frac{AD}{AC}=\frac{AM}{AD}=\frac{MD}{DC}, AD^2=AC\cdot AM=2\cdot 8=16, AD=4, \frac{MD}{DC}=\frac{1}{2}, DC=2MD.$

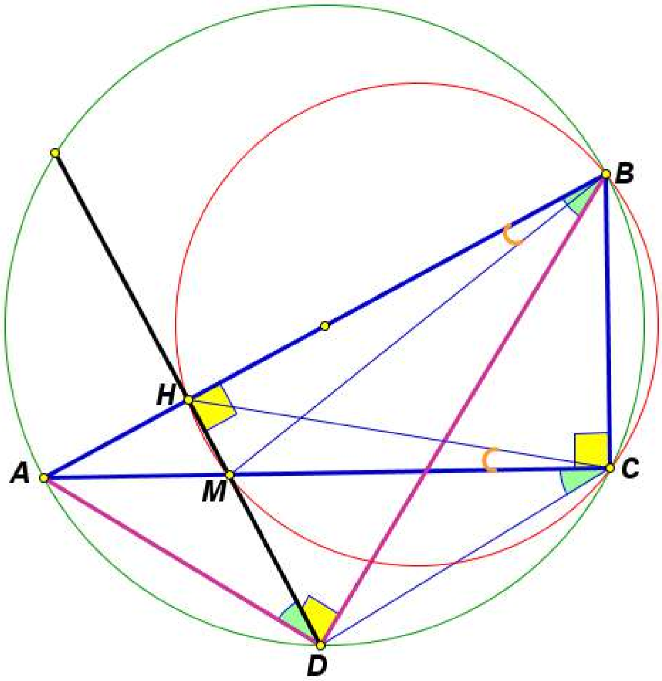
2. Около четырехугольника *CBHM* можно описать окружность с диметром *MB* (углы *MHB* и *MCB* прямые).

$\angle MCH=\angle MBH=\alpha, \operatorname{tg}\alpha=1/7.$ Обозначим $BH=x, BC=y, MH=z.$ Тогда $\frac{z}{x}=\frac{1}{7}, x=7z.$ Треугольники *AMH* и *ABC* подобны. Тогда $\frac{AM}{AB}=\frac{AH}{AC}=\frac{MH}{BC},$ или $\frac{2}{\sqrt{y^2+64}}=\frac{\sqrt{y^2+64}-7z}{8}=\frac{z}{y},$ или

$$\begin{cases}16=y^2+64-7z\sqrt{y^2+64},\\ 2y=z\sqrt{y^2+64},\end{cases}\Rightarrow 16=$$

$y^2+64-14y,\ y^2-14y+48=0, y_1=6, y_2=8.$

1) $y=6, z=\frac{6}{5}, AB=10,$ 2) $y=8, z=\sqrt{2}, AB=8\sqrt{2}.$



3. Рассмотрим треугольник *ABD*. Имеем в **первом случае:** $AB=10, AD=4, HM=\frac{6}{5}, BD=\sqrt{100-16}=2\sqrt{21},\ DH=\frac{8\sqrt{21}}{10}=\frac{4\sqrt{21}}{5},\ MD=\frac{4\sqrt{21}-6}{5}, DC=\frac{8\sqrt{21}-12}{5}.$

Имеем в **втором случае:** $AB=8\sqrt{2}, AD=4, HM=\sqrt{2}, BD=\sqrt{128-16}=4\sqrt{7},\ DH=\frac{16\sqrt{7}}{8\sqrt{2}}=\sqrt{14},\ MD=\sqrt{14}-\sqrt{2}, DC=2\sqrt{14}-2\sqrt{2}.$

Ответ: $\frac{8\sqrt{21}-12}{5}$ или $2\sqrt{14}-2\sqrt{2}.$

4. Найдите все значения параметра a, при которых система

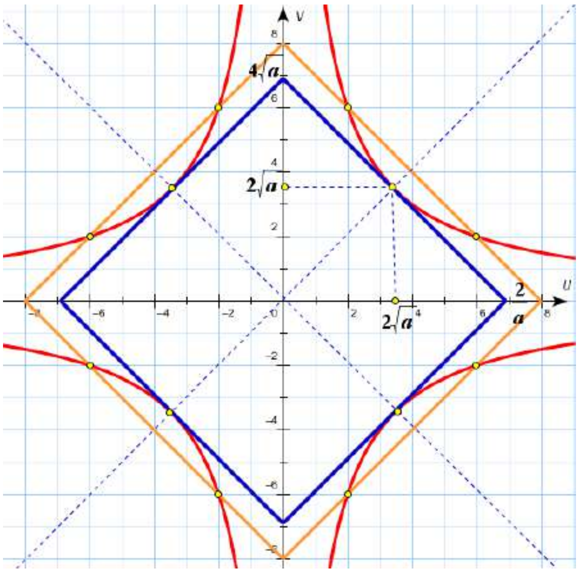
$$\begin{cases}(a|\log_2 y|+a|\log_2 x|-2)((\log_2 x)^2+(\log_2 y)^2-48a^2)=0,\\ (\log_a x)^2(\log_a y)^2(\log_2 a^2)^4=256a^2\end{cases}$$

имеет восемь различных решений. (16 баллов)

Решение. Сделаем замену переменных: $\log_2 x=u, \log_2 y=v$. Переменные u и v могут принимать любые значения, x и y находятся однозначно. Упростим второе уравнение системы: $(\log_a x)^2(\log_a y)^2(\log_2 a^2)^4=256a^2 \Leftrightarrow a>0,\ a\neq 1,\ (\log_2 x)^2(\log_2 y)^2=16a^2,$ $|uv|=4a$. Тогда получим

$$\begin{cases}(a|v|+a|u|-2)(u^2+v^2-48a^2)=0,\\ |uv|=4a, a>0, a\neq 1,\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|v|+|u|=2/a,\\ |uv|=4a,\ \ a>0, a\neq 1,\end{cases}\\ \begin{cases}u^2+v^2=48a^2,\\ |uv|=4a,\ \ a>0, a\neq 1.\end{cases}\end{array}\right.$$

I. $\begin{cases} |v|+|u| = 2/a\,, \\ |uv| = 4a, \;\; a>0, a\neq 1. \end{cases}$



1) Система имеет 4 различных решения, если

$$\frac{2}{a} = 4\sqrt{a}, \;\; a = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

2) Система имеет 8 различных решений, если

$$\frac{2}{a} > 4\sqrt{a}, \;\; 0 < a < \frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

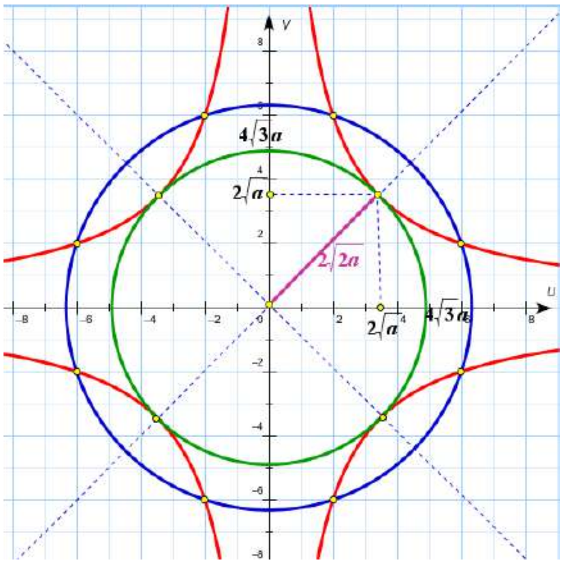
II. $\begin{cases} u^2+v^2 = 48a^2, \\ |uv| = 4a, \;\; a>0, a\neq 1. \end{cases}$

1) Система имеет 4 различных решения, если

$$4\sqrt{3}a = 2\sqrt{2a}, \qquad a = 1/6.$$

2) Система имеет 8 различных решений, если

$4\sqrt{3}a > 2\sqrt{2a}, \;\; a > 1/6, \; a\neq 1.$



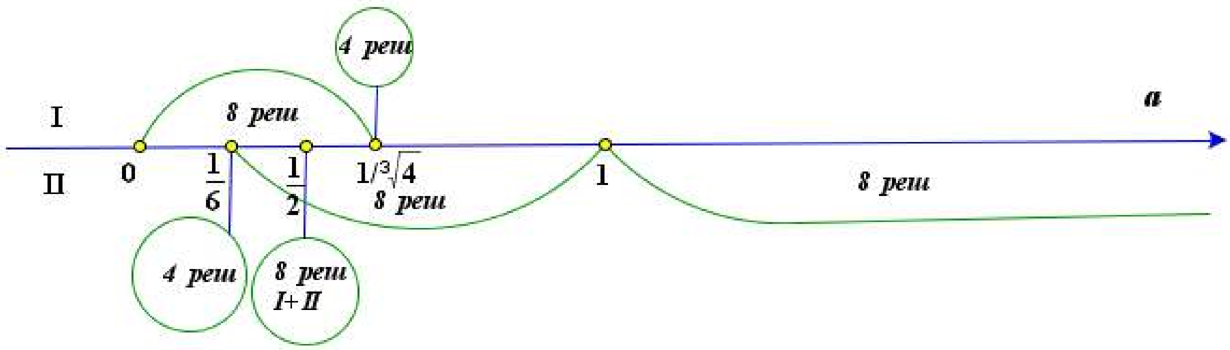
Возможные **совпадения** решений в I и II случаях:

$$\begin{cases} |v|+|u| = 2/a\,, \\ u^2+v^2 = 48a^2, \\ |uv| = 4a, \;\; a>0, a\neq 1. \end{cases}$$

Из соображения симметрии можно рассмотреть только случай, когда $u>0, v>0$. Тогда

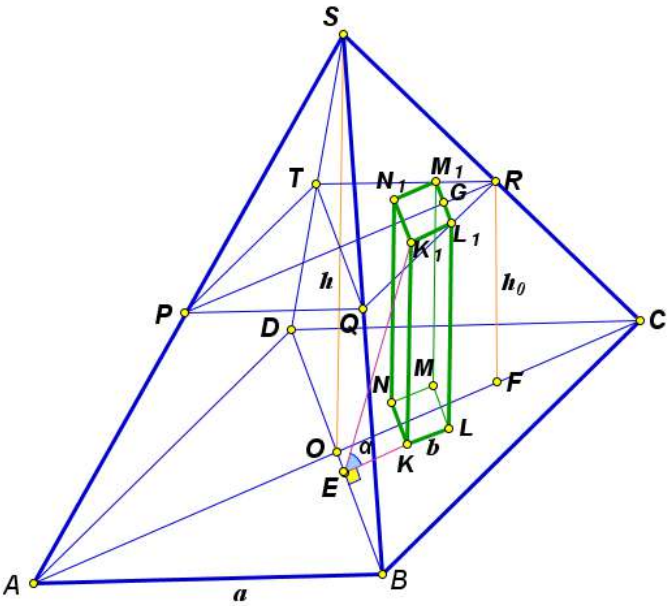
$$\begin{cases} v+u = 2/a\,, \\ u^2+v^2 = 48a^2, \\ uv = 4a, \;\; a>0, a\neq 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v+u = 2/a\,, \\ (u+v)^2 = 48a^2+8a, \\ uv = 4a, \;\; a>0, a\neq 1. \end{cases}$$

Имеем $4/a^2 = 48a^2+8a, \quad 12a^4+2a^3-1=0,$
$a=1/2\,, \;\; 12a^4+2a^3-1 = (a-1/2)(12a^3+8a^2+4a+2)$. Многочлен $12a^3+8a^2+4a+2$ положительных корней не имеет. При $a=1/2$ решения I и II случаев совпадают, и система будет иметь 8 решений.



Ответ: $a \in (0;\; 1/6) \cup \{1/2\} \cup (1/\sqrt[3]{4}; 1) \cup (1;+\infty)$.

5. Внутри правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ расположена правильная четырехугольная призма $KLMNK_1L_1M_1N_1$, основание $KLMN$ которой лежит в плоскости ABC. Центр основания $KLMN$ призмы расположен на отрезке AC, $KL \parallel AC$, $KN \parallel BD$ (точки K и B лежат по одну сторону от AC), сторона основания призмы равна 2, боковое ребро KK_1 призмы равно 1. Вершины L_1 и M_1 верхнего основания призмы $KLMNK_1L_1M_1N_1$ принадлежат боковым граням SBC и SCD пирамиды $SABCD$ соответственно. Плоскость γ проходит через точки B, K_1 и N_1. Найдите объемы частей, на которые делит пирамиду $SABCD$ плоскость γ, если сторона пирамиды равна $8\sqrt{2}$, а её высота равна 4. (20 баллов)



Решение. Плоскость γ содержит BD.

По условию имеем $AB = a = 8\sqrt{2},\ SO = h = 4$,

$KL = b = 2, KK_1 = h_0 = 1$.

$PR \parallel AC \parallel KL, RF \parallel SO, RF = h_0$.

$\Delta RCF \sim \Delta SCO,\quad \frac{CF}{CO} = \frac{RF}{SO} = \frac{h_0}{h} = \frac{1}{4}, CF = \frac{CO}{4}$.

Плоскость PQR параллельна ABC.

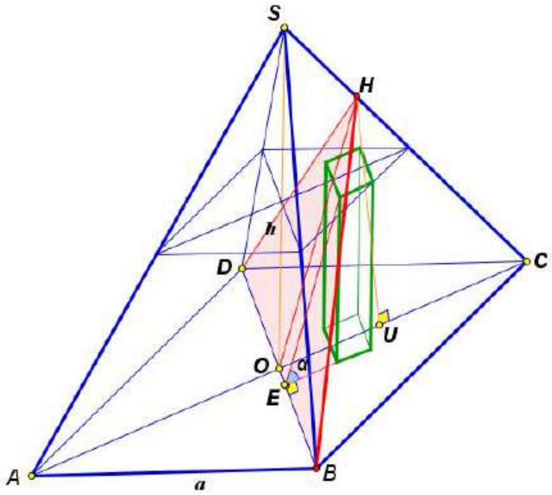
$GR \perp M_1L_1, GR = \frac{b}{2} = 1. KE \perp BD,$

$KE = CO - CF - GR - KL = \frac{3CO}{4} - \frac{3b}{2} = 6 - 3 = 3.$

Обозначим через α угол наклона плоскости γ к плоскости основания ABC. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h_0}{KE} = \frac{1}{3}$.

Пусть точка H – точка пересечения плоскости γ и ребра SC. Тогда $\angle HOC = \alpha$. Если HU – перпендикуляр, опущенный на плоскость ABC, то $\frac{HU}{OU} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$.

$\Delta HCU \sim \Delta SCO,\ \frac{HU}{SO} = \frac{CU}{CO}, \frac{HU}{h} = \frac{CO-OU}{CO},\ \frac{HU}{h} = \frac{CO-3HU}{CO},\ \frac{HU}{4} = \frac{8-3HU}{8}, 20HU = 32, HU = \frac{8}{5}$.



Объем пирамиды $HBCD$: $V_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{BD\cdot OC}{2}\cdot HU = \frac{512}{15}$.

Объем пирамиды $SABCD$: $V = \frac{1}{3}a^2h = \frac{512}{3}$.

Объем второй части $V_2 = \frac{512}{3} - \frac{512}{15} = \frac{2048}{15}$.

Ответ: $\mathbf{\frac{512}{15}, \frac{2048}{15}}$.

6. Все больше стран осваивают космос. Государств, которые запускают свои спутники собственными ракетоносителями – уже 12. А есть еще страны, которые пользуются услугами основных космических держав для запуска своих спутников в народнохозяйственных целях. Из-за роста числа участников космической деятельности и увеличения ее интенсивности встают вопросы обеспечения безопасности космических операций. Так, например, NASA обратилась к корпорации «Энергия» с просьбой уменьшить высоту орбиты МКС.

а) Считая Землю шаром радиуса R, определите, какое наибольшее количество спутников одновременно может находиться на орбитах вокруг Земли на одной и той же высоте H от ее поверхности так, чтобы расстояние между аппаратами было больше $\sqrt{2}(R+H)$.

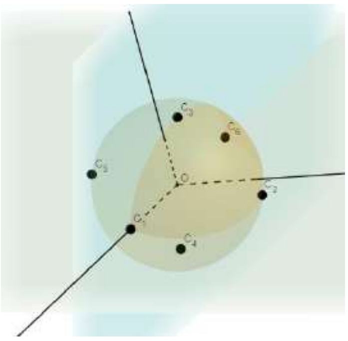
б) Для найденного максимального количества спутников указать координаты возможного их расположения в системе координат с началом в центре Земли и осью абсцисс, направленной вдоль вектора, соединяющего центр Земли с одним из спутников. (20 баллов)

Решение. По условию в данный момент времени все спутники должны находится на сфере радиуса $R+H$. Обозначим O центр сферы, а ее радиус $R_H=R+H$. Спутники обозначим точками C_i, $i=1,\ldots,n$. Надо определить максимальное значение n.

Найдем расстояние C_iC_j, используя теорему косинусов для треугольника OC_iC_j.

$$C_iC_j^2 = OC_i^2 + OC_j^2 - 2OC_i \cdot OC_j \cdot \cos(\angle OC_i, OC_j) = 2R_H^2 - 2R_H^2 \cdot \cos\alpha = 2R_H^2(1-\cos\alpha) > 2R_H^2,$$

Значит, $1-\cos\alpha > 1 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha < 0$. Покажем, что четыре спутника, удовлетворяющие такому условию, расположить на орбитах можно. Они могут располагаться в вершинах правильного тетраэдра, вписанного в сферу ($\cos\alpha = -1/3$). Этот случай разобран в пункте б). Предположим, что спутников может быть больше 4.



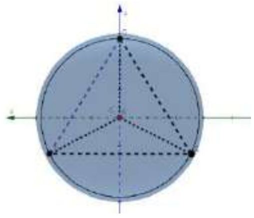
Поскольку по предположению спутников больше 4, следовательно, можно выбрать 3 спутника, не лежащих в одной плоскости с точкой O, и рассмотреть систему координат с центром в точке O. Ось абсцисс направим вдоль прямой OC_1 и за единицу примем расстояние OC_1. Ортогональную ось ординат направим так, чтобы точка C_2 имела координаты $(x_2, y_2, 0)$, и ордината была положительна $y_2 > 0$, а третью ось направим в сторону, ближайшую к $C_3(x_3, y_3, z_3)$, чтобы аппликата была положительна, т.е. $z_3 > 0$. Рассмотрим скалярные произведения векторов, учитывая, что все они отрицательны.

$$\overrightarrow{OC_1} \cdot \overrightarrow{OC_i} = x_i, \ \ i = \overline{2,n}, \quad \overrightarrow{OC_2} \cdot \overrightarrow{OC_i} = x_2x_i + y_2y_i, \ i = \overline{3,n}, \quad \overrightarrow{OC_3} \cdot \overrightarrow{OC_i} = x_3x_i + y_3y_i + z_3z_i, \ \ i = \overline{4,n}.$$

Поскольку $\cos(\angle OC_i, OC_j) < 0$, то скалярные произведения векторов отрицательны, и, следовательно, $x_i < 0, \ i = \overline{2,n}$, значит, все $y_i < 0, \ i = \overline{3,n}$, $x_3x_i + y_3y_i + z_3z_i < 0, \ \ i = \overline{4,n}$. Значит, что и все $z_i < 0, \ \ i = \overline{4,n}$. Таким образом, у всех векторов, начиная с $\overrightarrow{OC_4}$, все координаты будут отрицательны. Следовательно, скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OC_4}$, $\overrightarrow{OC_5}$ будет положительным. Получили противоречие. Предположение о наличии более 4 спутников, удовлетворяющим требуемым условиям, неверно. **Ответ:** 4 спутника.

б) 4 спутника возможны, например, с координатами, которые можно записать так:

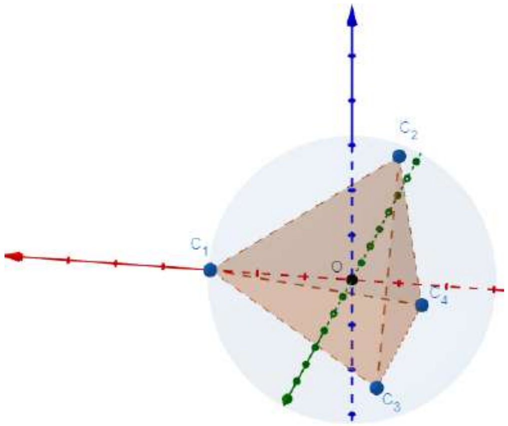
если направить ось *ox* из центра сферы по направлению одного из спутников, то координаты этого спутника будут равны (R_H, 0, 0), остальные три спутника будут находиться на плоскости $x=-R_H/3$ и их координаты будут соответственно равны

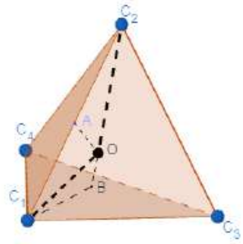


$$(-R_H/3,\ 0,\ r),\qquad (-R_H/3, \sqrt{3}r/2, -r/2),\qquad (-R_H/3, -\sqrt{3}r/2, -r/2),$$

где $r=\sqrt{R_H{}^2-R_H{}^2/9}=R_H\sqrt{8}/3$.

Эти соотношения получаются из рассмотрения соотношений между элементами правильного тетраэдра со стороной *a*. Высота $H=\sqrt{a^2-(a\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3})^2}=a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Радиус сферы, описанной около правильного тетраэдра, находится из подобия треугольников





$$\frac{H}{a}=\frac{a}{2R}\ \Rightarrow\ R=\frac{a^2}{2\sqrt{\frac{2}{3}}a}=\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\ \Rightarrow\ \frac{H}{R}=\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}a}{\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}=\frac{4}{3}$$