Время выполнения заданий — 240 минут.

Пишите разборчиво. В работе не должно быть никаких пометок, не относящихся к ответам на вопросы. Если Вы не знаете ответа, ставьте прочерк.
Проверяться будет как сам ответ в бланке, так и черновики, по которым будет восстанавливаться логика получения результата.

Максимальное количество баллов — 100.

Задача 1. Большой по площади водоём с плоским дном заполен водой глубины d. Далеко от его краёв находится вертикально расположенная труба, выходящая из дна. Верхний конец трубы запаян и находится вровень с водной поверхностью. Диаметр трубы мал по сравнению с её длиной. Через нижний конец трубы в неё подаётся насосом вода, которая вытекает из отверстий, проделанных на её боковой поверхности. Отверстия распределены таким образом, что вода из трубы вытекает во все стороны и по всей её длине с одинаковой интенсивностью. Полный расход жидкости (объём в единицу времени) равен Q.

1) На поверхность жидкости на расстоянии r от оси трубы упало лёгкое семечко тополя, после чего оно стало, оставаясь на поверхности, переноситься жидкостью вдоль прямой, проходящей через ось трубы. Найдите зависимость координаты этого семечка от времени.
2) Найдите слабое отклонение формы поверхности жидкости от горизонтальной плоскости.

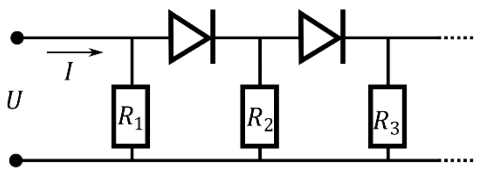
Считайте, что течение жидкости постоянно во времени, влияние вязкости на распределение течения в пространстве пренебрежимо мало. Число Фруда, определяемое как максимальный угол наклона поверхности в радианах, мало, так что пункт 1) следует решать, приняв поверхность жидкости идеально плоской. Ускорение свободного падения равно g.

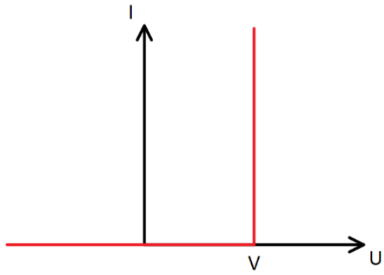
Задача 2. Планета Железяка имеет идеально сферическую и идеально гладкую поверхность. Кроме того, вследствие процессов в ядре планеты, она может изменять свой радиус. При этом сферичность и гладкость поверхности сохраняются. По поверхности планеты могут двигаться без трения маленькие железные удлинённые шайбы, представляющие собой цилиндры с эллиптическим основанием, лежащие на торце. Между собой шайбы сталкиваются абсолютно упруго. Шайбы случайно раскиданы по поверхности планеты, среднее расстояние между шайбами велико по сравнению с их размерами, но мало по сравнению с радиусом планеты. Всего шайб N, масса одной шайбы m.

1) В начальный момент времени все шайбы покоились. Затем каждой шайбе сообщили поступательную случайно направленную вдоль поверхности скорость, по абсолютному значению равную v. Чему будет равна средняя кинетическая энергия поступательного движения брусков через большое время? В течении этого времени Железяка не изменяла свой радиус.
2) После этого Железяка медленно увеличила свой радиус в 8 раз. Во сколько раз изменилась средняя кинетическая энергия поступательного движения шайб к концу этой стадии расширения?
3) Затем Железяка быстро увеличила свой радиус в 2 раза. Во сколько раз изменилась средняя кинетическая энергия поступательного движения шайб к моменту окончания быстрой стадии расширения?

Большое время, медленность и быстрота процессов расширения определяются относительно среднего времени между столкновениями шайб. Ускорение свободного падения на поверхности планеты всегда остаётся на столько сильным, что в процессе расширения планеты шайбы не отрываются от неё.

Задача 3. Бесконечная линия состоит из идеальных диодов с напряжением открытия, равным V (вольт-амперная характеристика диода представлена на рисунке), а также резисторов с сопротивлением $R_n = R/n$, где n – номер звена линии, смотри Рисунок. Найдите вольт-амперную характеристику всей цепи. Какой приближённой формулой её можно описать при больших напряжениях $U \gg V$?





Задача 4. Для изготовления барабана Чебурашка использовал размеченную «в клеточку» посеребрённую тонкую кожу. Пока кожа была нерастянута, размер всех клеточек был $a = 10$ мм. Когда Чебурашка аккуратно натянул кожу на металлическое кольцо барабана радиуса $r = 20$ см, все клеточки остались квадратными, но их размеры увеличились до $a' = 11$ мм. При этом сила упругости в металле, действующая вдоль кольца вследствие сжатия, оказалась равной $T = 30$ Н. При испытании барабана давление в резонаторе барабана понизили на $\Delta p = 100$ Па по сравнению с атмосферным. На каком расстоянии h от барабана соберутся лучи, отраженные от мембраны, если осветить его плоским пучком, параллельным оси барабана?

Задача 5. Для определения значения ускорения свободного падения g проводилось измерение параметров траектории движения круглого шара диаметром $R = 10$ см, который подбрасывался вертикально вверх на высоту около $H_0 = 6$ метров. Измерялось время T пролёта шара вверх до точки остановки и высота H, на которую шар поднялся за время T; измерение величин H и T можно считать абсолютно точным.

Однако оказалось, что эксперименты с железным шаром и с резиновым мячиком в качестве шара того же размера дают немного отличающиеся значения константы g. Оцените погрешность измерения g для обоих экспериментов, возникающую вследствие сопротивления воздуха. *Указание:* на релевантных скоростях движения следует считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости шара. Для справки, динамическая вязкость воздуха $\eta = 2 \cdot 10^{-5}$Па · с.

11 класс. Решения.

Каждая задача оценивается в 20 баллов, всего 5 задач, сумма баллов равна 100. Решение каждой задачи состоит из нескольких шагов, соответствующее разбиение по баллам приведено после решения каждой задачи.

Задача 1. Механика – гидродинамика.

Задача 1. Большой по площади водоём с плоским дном заполен водой глубины d. Далеко от его краёв находится вертикально расположенная труба, выходящая из дна. Верхний конец трубы запаян и находится вровень с водной поверхностью. Диаметр трубы мал по сравнению с её длиной. Через нижний конец трубы в неё подаётся насосом вода, которая вытекает из отверстий, проделанных на её боковой поверхности. Отверстия распределены таким образом, что вода из трубы вытекает во все стороны и по всей её длине с одинаковой интенсивностью. Полный расход жидкости (объём в единицу времени) равен Q.

1) На поверхность жидкости на расстоянии r от оси трубы упало лёгкое семечко тополя, после чего оно стало, оставаясь на поверхности, переноситься жидкостью вдоль прямой, проходящей через ось трубы. Найдите зависимость координаты этого семечка от времени.
2) Найдите слабое отклонение формы поверхности жидкости от горизонтальной плоскости.

Считайте, что течение жидкости постоянно во времени, влияние вязкости на распределение течения в пространстве пренебрежимо мало. Число Фруда, определяемое как максимальный угол наклона поверхности в радианах, мало, так что пункт 1) следует решать, приняв поверхность жидкости идеально плоской. Ускорение свободного падения равно g.

Решение: 1) Окружим трубу воображаемым цилиндром с высотой, равной глубине водоёма, и осью, совпадающей с трубой. По условиям задачи скорость воды в каждой точке водоёма направлена вдоль радиуса цилиндра и зависит только от расстояния от рассматриваемой точки до оси, то есть не зависит от расстояния до дна и от угла поворота вокруг оси.

$$v(x, y, z) = v(r) \tag{1}$$

Рассмотрим точку, находящуюся на расстоянии r и цилиндр такого же радиуса. Скорость на каждой точке боковой грани этого цилиндра равна по модулю $v(r)$. Найдём эту скорость из закона сохранения массы. Масса, которая поступает в этот цилиндр из внешнего источника через трубу за время Δt равна $Q\rho\Delta t$, где ρ – плотность жидкости. Так как жидкость несжимаема, плотность воды одна и та же в любой точке водоёма. Масса, втекающая в цилиндр через трубу, равна массе воды, вытекающей через боковую поверхность цилиндра. Из этого условия получаем равенство

$$Q\rho\Delta t = d2\pi r\, v(r)\, \Delta \mathrm{t}\, \rho \tag{2}$$

Откуда получаем зависимость скорости жидкости от расстояния до трубы

$$v(r) = \frac{Q}{2\pi d r} \qquad (3)$$

Найдём теперь закон движения семечка, упавшего в начальный момент на жидкость на расстоянии R от трубы. Перепишем уравнение (3) немного по-другому, используя определение мгновенной скорости $v(r) = \frac{dr}{dt}$

$$\frac{2\pi d}{Q} r = \frac{dt}{dr} \qquad (4)$$

Из уравнения (4) легко получить зависимость $t(r)$, увидев, что данное уравнение является полным аналогом уравнения движения с постоянным ускорением $v = \frac{dx}{dt} = at$. Таким образом, решением уравнения (4) является зависимость

$$t(r) = t_0 + \frac{\pi d}{Q} r^2 \qquad (5)$$

Из этой зависимости легко получить зависимость $r(t)$:

$$r(t) = \sqrt{\frac{(t - t_0)Q}{\pi\, d}} \qquad (6)$$

Постоянную t_0 находим из начального условия $r(0) = R$ и получаем ответ – зависимость расстояния семечка от времени:

$$r(t) = \sqrt{\frac{t\, Q}{\pi\, d} + R^2} \qquad (7)$$

Движется оно всё время вдоль радиуса нашего воображаемого цилиндра.

2) Рассмотрим узкую трубку тока жидкости у поверхности водоёма.

На поверхности жидкости не происходит скачка давления, то есть давление жидкости p сразу под поверхностью равно атмосферному. Если бы равенства давлений жидкости и воздуха по обе стороны от поверхности жидкости достигнуто бы не было, то элемент поверхности жидкости должен был бы начать смещаться по нормали к поверхности. Однако течение у поверхности направлено всегда по касательной к поверхности.

Для того, чтоб определить форму трубки, запишем для трубки тока уравнение Бернулли:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2(r) + \rho g h(r) \; = \; p + \rho g d \qquad (8)$$

Левая часть равенства записана для точки тока, находящейся на расстоянии r от трубы, а правая для бесконечно удалённой точки: в ней уровень воды равен данной глубине водоёма $h = d$, а скорость течения равна нулю. Таким образом, форма поверхности

$$h - d = \; -\frac{Q^2}{8\pi^2 d^2 g} \frac{1}{r^2}. \qquad (9)$$

Заметим, что при отдалении от трубы уровень жидкости повышается к значению $h = d$.

Разбалловка.

Найдено распределение скорости жидкости по её объёму	6 баллов
Использована связь скорости семечка и скорости жидкости	3 балла
Правильно найдена зависимость координаты семечка от времени	3 балла
Указан способ связи высоты жидкости и скорости течения (записано уравнение Бернулли)	4 балла
Найдена верная форма поверхности жидкости	4 баллов

Задача 2. Термодинамика - механика

Задача 2. Планета Железяка имеет идеально сферическую и идеально гладкую поверхность. Кроме того, вследствие процессов в ядре планеты, она может изменять свой радиус. При этом сферичность и гладкость поверхности сохраняются. По поверхности планеты могут двигаться без трения маленькие железные удлинённые шайбы, представляющие собой цилиндры с эллиптическим основанием, лежащие на торце. Между собой шайбы сталкиваются абсолютно упруго. Шайбы случайно раскиданы по поверхности планеты, среднее расстояние между шайбами велико по сравнению с их размерами, но мало по сравнению с радиусом планеты. Всего шайб N, масса одной шайбы m.

1) В начальный момент времени все шайбы покоились. Затем каждой шайбе сообщили поступательную случайно направленную вдоль поверхности скорость, по абсолютному значению равную v. Чему будет равна средняя кинетическая энергия поступательного движения брусков через большое время? В течении этого времени Железяка не изменяла свой радиус.
2) После этого Железяка медленно увеличила свой радиус в 8 раз. Во сколько раз изменилась средняя кинетическая энергия поступательного движения шайб к концу этой стадии расширения?
3) Затем Железяка быстро увеличила свой радиус в 2 раза. Во сколько раз изменилась средняя кинетическая энергия поступательного движения шайб к моменту окончания быстрой стадии расширения?

Большое время, медленность и быстрота процессов расширения определяются относительно среднего времени между столкновениями шайб. Ускорение свободного падения на поверхности планеты всегда остаётся на столько сильным, что в процессе расширения планеты шайбы не отрываются от неё.

Решение: 1) Задачу можно рассматривать в рамках термодинамики, по аналогии с трёхмерным идеальным газом. Тогда начальное состояние, в котором каждая шайба двигались с одинаковыми по модулю скоростями, следует назвать неравновесным состоянием. А состояние двумерного газа шайб через большое время – равновесным. Помимо этого, следует заметить, что двумерный газ шайб – идеальный газ, так как все соударения происходят упругим образом. Также можно ввести понятия степеней свободы для каждой шайбы. У каждой шайбы есть три степени свободы: две поступательных и одна вращательная – вокруг оси шайбы. В процессе перехода в термодинамическое равновесия шайбы будут сталкиваться, распределяя суммарную начальную энергию всех шайб по степеням свободы каждой шайбы.

По теореме о равнораспределении энергии по степеням свободы можно заключить, что на вращательные степени свободы будет приходиться треть всей энергии в состоянии термодинамического равновесия, а на поступательные – две трети:

ответ: $$E_{\text{поступальные}} = \frac{2}{3} N \frac{mv^2}{2}. \quad (1)$$

2) При медленном расширении планеты происходит адиабатическое расширение газа шайб. Так как газ идеальный, для него справедливо уравнение Менделеева-Клайперона в виде:

$$\sigma S = \nu RT, \quad (2)$$

где S – это площадь планеты (аналог объёма для трёхмерного идеального газа), σ – сила на единицу длины (аналог давления – силы на единицу площади), а температура определяется как средняя энергия, приходящаяся на 1 степень свободы газа:

$$\frac{1}{2} k_{\text{Б}} T = \langle E_j \rangle. \quad (3)$$

Здесь $k_{\text{Б}}$ – константа Больцмана. Для адиабатического процесса над идеальным газом справедлива формула адиабаты в виде

$$\mathrm{T}\, S^{\gamma-1} = const \quad (4)$$

(для идеального трёхмерного газа формула была бы $T\, V^{\gamma-1} = const$). В этой формуле γ – показатель адиабаты газа. Он равен $\gamma = \frac{i+2}{i}$, где i – количество степеней свободы одной шайбы, в нашем случае $i = 3$. Объединяя формулы (3) и формулу (4), считая показатель адиабаты для нашей задачи, получаем условие на неизменность следующей величины:

$$E_{\text{поступательные}}\, S^{2/3} = \text{const} \quad (5)$$

Площадь планеты пропорциональна квадрату её радиуса $S = 4\pi r^2$. Подставляя эту зависимость в уравнение (5), получаем

$$E_{\text{поступательные}}\, r^{4/3} = \text{const} \quad (6)$$

Из этого уравнение находим отношение средней кинетической энергии поступательного движения после расширения к энергии до:

ответ: $$\frac{E_{\text{поступательные}}(8R)}{E_{\text{поступательные}}(R)} = 8^{-4/3} = \frac{1}{16}. \quad (7)$$

3) Если планета расширяется быстро, то такой процесс неравновесный, а потому записывать для него уравнение адиабаты нельзя (в своём выводе оно подразумевает, что процесс квазистационарный, что значит, что процесс проходит так медленно, что в каждый момент времени можно считать газ находящимся в термодинамическом равновесии). Можно, однако, рассмотреть другие неизменяющиеся величины. Ошибочно было бы считать, что данной величиной выступает энергия, так как существует сила, совершающая работу над газом – сила реакции планеты.

Сохраняющимися величинами являются моменты импульса поступательного движения каждой шайбы относительно центра планеты. Действительно, на каждую шайбу действует две внешние по отношению к газу силы: сила тяжести и сила реакции планеты, направления которых проходят через центр планеты. Если u_i – скорость некоторой шайбы №i, то момент импульса е поступательного движения равен

$$\mathrm{u}_i\, r = const \tag{8}$$

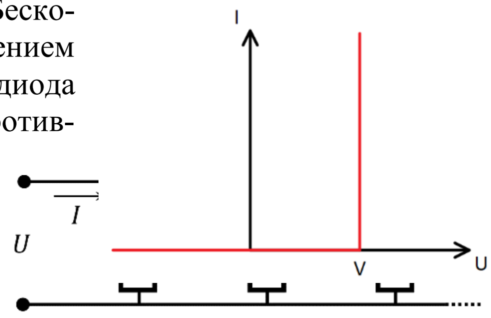
Если радиус планеты увеличился в 2 раза, то скорость поступательного движения каждой шайбы упала в 2 раза. Значит, кинетическая энергия к концу процесса расширения упала в 4 раза:

$$\text{ответ:} \qquad \frac{\mathrm{E}_{\text{поступательные}}(16R)}{\mathrm{E}_{\text{поступательные}}(8R)} = \frac{1}{4}. \tag{7}$$

Указана связь задачи с задачей об идеальном газе	2 балла
Правильно определено количество степеней свободы шайбы	2 балла
Записана теорема о равнораспределении энергии по степеням свободы	2 балла
Записан закон сохранения энергии для начала и конца процесса термализации	2 балла
Получен верный ответ на 1 пункт задачи	3 балла
Записано уравнение адиабаты для медленного расширения планеты	3 балла
Правильно получен ответ на 2 пункт задачи	2 балла
Записан закон сохранения момента импульса при быстром расширении планеты	2 балла
Получен верный ответ на 3 пункт задачи	2 балла

Задача 3. Электричество.

Условие (Лужнов Алексей Сергеевич, 20 баллов). Бесконечная линия состоит из идеальных диодов с напряжением открытия, равным V (вольт-амперная характеристика диода представлена на рисунке), а также резисторов с сопротивлением $R_n = R/n$, где n – номер звена линии, смотри Рисунок. Найдите вольт-амперную характеристику всей цепи. Какой приближённой формулой её можно описать при больших напряжениях $U \gg V$?



Решение. Полный ток, протекающий через цепь, равен сумме токов I_n, которые протекают через звенья линии. Напряжение на резисторе № n равно $U_n = U - (n-1)V$. Таким образом,

$$I = \sum I_n = \sum \frac{U_n}{R_n} = \frac{1}{R} \sum n(U - (n-1)V). \tag{1}$$

В уравнении (1) суммирование надо производить с $n = 1$ до $n = N$, где целое N определяется неравенствами

$$\frac{U}{V} < N < \frac{U}{V} + 1. \tag{2}$$

Что можно переписать как

$$N = \left\lceil \frac{U}{V} \right\rceil \tag{3}$$

Где функция $\lceil x \rceil$ округляет x до ближайшего целого вверх.

Пользуемся следующими формулами для суммирования:

$$\sum_1^N n = \sum_0^N n = \frac{N(N+1)}{2}, \qquad \sum_1^N n^2 = \sum_0^N n^2 = \frac{N(N+1)(N+1/2)}{3}, \tag{4}$$

И получаем из уравнения (1) с подстановкой N из формулы (3) значение вольт-амперной характеристики данной схемы:

$$I = \frac{V}{6R}\left(1 + \left\lceil \frac{U}{V} \right\rceil\right)\left(2 + \left\lceil \frac{U}{V} \right\rceil\right)\left(\frac{3U}{V} - 2\left\lceil \frac{U}{V} \right\rceil\right) \tag{5}$$

При $U \gg V$ можно положить $\lceil U/V \rceil = U/V$ и пренебречь членами порядка единицы около U/V (так как $U/V \gg 1$) , так что вольт-амперной характеристикой для больших напряжений будет следующее выражение:

$$I = \frac{U^3}{6RV^2} \tag{6}$$

Верно определено напряжение на каждом резисторе	4 баллов
Записан ток через систему в виде суммы	3 балла
Правильно расставлены пределы суммы	3 балла
Правильно подсчитана сумма n	1 балла
Правильно подсчитана сумма n^2	3 балла
Получен верный ответ для вольт-амперной характеристики схемы (в любом виде без суммы)	3 баллов
Получен верный ответ для вольт-амперной характеристики при большом напряжении	3 баллов

Задача 4. Механика-Оптика

Условие (Мельниковский Лев Александрович) (20 баллов). Для изготовления барабана Чебурашка использовал размеченную «в клеточку» посеребрённую тонкую кожу. Пока кожа была нерастянута, размер всех клеточек был $a = 10$ мм. Когда Чебурашка аккуратно натянул кожу на металлическое кольцо барабана радиуса $r = 20$ см, все клеточки остались квадратными, но их размеры увеличились до $a' = 11$ мм. При этом сила упругости в металле, действующая вдоль кольца вследствие сжатия, оказалась равной $T = 30$ Н. При испытании барабана давление в резонаторе барабана понизили на $\Delta p = 100$ Па по сравнению с атмосферным. На каком расстоянии h от барабана соберутся лучи, отраженные от мембраны, если осветить его плоским пучком, параллельным оси барабана?

Решение. Сначала объясним сам эффект фокусировки. Сразу после того, как кожу натянули на кольцо барабана, кожа образовывала плоскую поверхность. Поскольку кожа растянута однородно, то в этом состоянии у неё везде одно и то же поверхностное натяжение σ, rкоторое есть сила, требуемая для удержания вместе краев короткого прямолинейного разреза на единицу длины разреза. После же того, как давление в барабане понизили, натянутая кожа изменила свою форму, будучи эластичной. Поскольку разница давлений по разные стороны кожи везде одна и та же, и однородно её поверхностное натяжение, то кожа должна принять форму элемента сферы радиуса R. Теперь всё готово для того, чтобы сказать, что отражение света от металлизированной кожи происходит как от сферического зеркала. Фокусировка параллельного пучка происходит на расстоянии $R/2$.

Формула Лапласа позволяет найти радиус сферы,

$$R = \frac{2\,\sigma}{\Delta p}.$$

Поверхностное натяжение кожи свяжем с силой сжатия кольца по той же формуле Лапласа:

$$\sigma = \frac{T}{r}$$

В результате получаем, что

$$R = \frac{2\,T}{r\,\Delta p} = 3\text{ м}, \qquad h = 1.5\text{ м}.$$

Наша модель работает при том условии, если степень растяжения кожи до и после откачки давления изменилась незначительно по сравнению с уже имеющимся растяжением, достигнутым после того, как кожа была натянута на кольцо. Это уже имеющееся растяжение определяется параметром $(a' - a)/a = 0.1$. Проверим это условие. Угол, под которым видно кольцо барабана из центра сферы (элемент которой образует кожа) равен $\varphi = r/R = 0.034$ рад. Степень дополнительного растяжения оценивается как разница длин хорды и дуги, натянутых на этот угол, делённая на одну из этих длин:

$$\frac{\varphi - \sin\varphi}{\varphi} = \frac{\varphi^2}{6} \approx 7 \cdot 10^{-4} \ll 0.1$$

Таким образом, действительно, дополнительно растяжение мало по сравнению с исходным растяжением кожи.

Использование идеи о связи силы сжатия кольца и разницы давлений через коэффициент поверхностного натяжения мембраны (или использована любая другая ***правильная*** идея решения задачи)	2 балла
Правильно записано уравнение Лапласа на связь радиуса деформации кожи, коэффициента поверхностного натяжения и разности давления	5 баллов
Правильно записана связь силы сжатия	5 баллов

кольца и коэффициента поверхностного натяжения	
Правильно определён радиус деформации кожи	3 балла
Правильно определена связь между радиусом деформации кожи и фокусным расстоянием	4 балла
Обосновано приближение малых деформаций	1 балла

Задача 5. Задача-оценка

Условие (Вергелес Сергей Сергеевич) (20 баллов). Для определения значения ускорения свободного падения g проводилось измерение параметров траектории движения круглого шара диаметром $R = 10$ см, который подбрасывался вертикально вверх на высоту около $H_0 = 6$ метров. Измерялось время T пролёта шара вверх до точки остановки и высота H, на которую шар поднялся за время T; измерение величин H и T можно считать абсолютно точным.

Однако оказалось, что эксперименты с железным шаром и с резиновым мячиком в качестве шара того же размера дают немного отличающиеся значения константы g. Оцените погрешность измерения g для обоих экспериментов, возникающую вследствие сопротивления воздуха. *Указание:* на релевантных скоростях движения следует считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости шара. Для справки, динамическая вязкость воздуха $\eta = 2 \cdot 10^{-5}$Па $\cdot$ с.

Решение. Введём ось y, направленную вверх с нулём на уровне подбрасывания шарика. Запишем уравнение движения для шарика (оно справедливо пока скорость шарика направлена вверх):

$$m\ddot{y} = -mg - \beta\dot{y}^2 \qquad (1)$$

Тут β – пока неизвестный коэффициент пропорциональности между силой и квадратом скорости. Попробуем оценить его методом размерностей.

Этот коэффициент должен зависеть от геометрии шарика и от свойств воздуха. В нашей задаче всего три параметра, от которых может зависеть этот коэффициент: плотность воздуха (чем плотнее воздух, тем, кажется на первый взгляд, сложнее через него лететь), вязкость воздуха (чем больше коэффициент вязкости, тем больше сила сопротивления) и размер шарика (у большего шарика большая сила сопротивления, так как он взаимодействует с большей площадью и объёмом воздуха).

Таким образом, $\beta = \beta(R, \eta, \rho)$. Размерность коэффициента, с одной стороны, восстанавливается из уравнения (1) – его произведение с квадратом скорости имеет размерность силы. С другой стороны, размерность коэффициента получается перемножением размерностей (в соответствующих степенях) параметров, от которых он зависит. Мы заранее не знаем, как выражается β через параметры (R, η, ρ), поэтому положим, что $\beta \sim R^{\alpha} \cdot \eta^{\gamma} \cdot \rho^{\delta}$. Тогда для размерностей будет следующее соотношение:

$$[\beta] = [R]^{\alpha}[\eta]^{\gamma}[\rho]^{\delta} \qquad (2)$$

Восстанавливая размерность β из выражения (1) и подставляя размерности остальных величин в выражение (2), получаем:

$$[\text{кг/м}] = [\text{м}]^{\alpha}[\frac{\text{кг}}{\text{м}\cdot\text{с}}]^{\gamma}[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}]^{\delta} \tag{3}$$

Так как в нашей системе единиц единицы кг, м и с независимы друг от друга, мы можем из уравнения (3) составить 3 уравнения, приравнивая степени перед кг, м и с соответственно в левой и правой частях уравнения. Тогда мы получим

$$\begin{cases} 1 = \gamma + \delta \\ -1 = \alpha - \gamma - 3\delta \\ 0 = -\gamma \end{cases} \tag{4}$$

Решая эту систему, получаем коэффициенты

$$\begin{cases} \delta = 1 \\ \gamma = 0 \\ \alpha = 2 \end{cases} \tag{5}$$

То есть уравнение движения перепишется в виде

$$m\ddot{y} = -mg - C\,R^2\rho\,\dot{y}^2 \tag{6}$$

Где C – некоторая константа порядка единицы, которую мы не можем получить методом размерностей.

Поделим уравнение (6) на массу шарика, посчитанную как объём, помноженный на плотность шарика. Числовую константу $4/3\,\pi$, которая порядка единицы, мы писать не будем, потому что это не добавит точности ответу: все константы порядка единицы “сидят” внутри константы C.

$$\ddot{y} = -g - C\frac{\rho}{R\rho_{\text{шара}}}\,\dot{y}^2 \tag{7}$$

Из уравнения (7) видно, что неточность измерения ускорения свободного падения будет порядка $\frac{\rho}{R\rho_{\text{шара}}}\,V^2$, где V – некоторая характерная скорость движения шара. Положим её равной начальной скорости движения, которую можно получить из высоты подъёма в высшую точку: $V = \sqrt{2gH}$ (двойкой в конечном ответе тоже, конечно, пренебрежём). Для подсчёта ответа возьмём $R = 0.1$ м, $H = 6$ м, $g = 10$ м/с^2, $\rho = 1$ кг/м^3, $\rho_{\text{шара}} = 10\,000$ кг/м^3 :

$$\Delta g \approx \frac{\rho}{R\,\rho_{\text{шара}}}gH \approx 0.1\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \tag{8}$$

Записано уравнение движения шарика с учётом силы сопротивления воздуха	3 балла
Указаны все параметры задачи, от которых зависит сила сопротивления	3 балла
Составлена система линейных уравнений, связывающая размерности величин, от которых зависит сила сопротивления	4 балла
Получена верная зависимость силы сопротивления от параметров задачи	2 балла

Записана оценка отклонения измеренного ускорения свободного падения от действительного, как характерная сила сопротивления, делённая на массу шара	5 балла
Взяты разумные значения физических величин в задаче	2 балла
Получен верный порядок ответа	1 балл