Время выполнения заданий – 240 минут

Максимальное количество баллов – 100

Задание 1 (13 баллов).
В этой задаче запись $x \mod n$, где x – целое а n – натуральное, обозначает такое целое число y от 0 до $n - 1$, что $x - y$ делится на n. Существует ли такая функция f, определенная для целых значений аргумента и принимающая целые значения, что при любом целом x верно

$$f((x^2 + 1) \mod 7) = (f(x)^2 + 1) \mod 11?$$

Задание 2 (20 баллов).
В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, AC, AB соответственно. Точки A_2, B_2, C_2 – середины ломанных BAC, ABC, ACB соответственно (точка называется *серединой ломанной* если принадлежит ломанной и делит ее на две ломанных равной длины). Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 проходят через одну точку.

Задание 3 (20 баллов).
Вася пришел в казино, имея один вшэ-коин (единственную в мире виртуальную валюту, которую можно делить на любые части; например, можно поставить на кон $\pi/10$ вшэ-коина). В казино игрокам предлагается делать ставки на цвет шара, который будет вытащен из ящика. Фиксировано число p, причем $1<p<2$. Если цвет вытащенного шара совпадает с тем, на который игрок поставил x денег – игрок получит назад px денег, если не совпадает – не получит ничего. Для ставок в каждом раунде можно использовать не только деньги, имевшиеся к началу игры, но и выигрыши прошлых раундов. Перед началом игры Вася смог подсмотреть, что в ящик положили 2 черных и 3 красных шара (других шаров нет), сыгранные шары обратно в ящик не возвращаются, игра происходит пока ящик не опустеет. Какую максимальную сумму Вася может гарантированно иметь к концу розыгрыша?

Задание 4 (28 баллов).
Напомним, что *запись числа n в t-ичной системе счисления* – это представление $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_0} = a_k t^k + a_{k-1} t^{k-1} + \dots + a_0$, где a_i – целые числа от 0 до $t - 1$, причем a_k – не ноль. Назовем четырехзначное число $\overline{abcd}$ интересным если $\overline{ab} + \overline{cd} = \overline{bc}$. Найдите количество упорядоченных пар интересных чисел, сумма которых – тоже интересное число (как функцию от t в замкнутой форме).

Задание 5 (40 баллов).
M – середина стороны BC треугольника ABC. Касательные, проведённые из M к вписанной окружности треугольника ABC, касаются этой окружности в точках P, Q. Касательные из M к вневписанной окружности ABC, касающейся стороны BC, касаются этой окружности в точках R, S. Прямые PQ, RS пересекаются в точке X. Оказалось, что $AX = AM$. Найдите угол $\angle BAC$.

Задание 6 (50 баллов).
Рассматриваются всевозможные наборы действительных чисел $x_1, \dots, x_{2021}$, не превосходящих по модулю 1, с суммой 0. Для какого наименьшего C можно любой такой набор расставить по кругу так, что сумма любых нескольких стоящих подряд чисел будет по модулю не больше C?