Математика **7 класс**

Время выполнения задания – 240 минут.

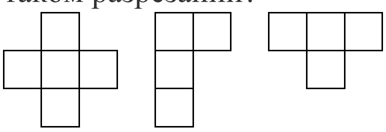
Максимальное количество баллов – 100.

Задание 1 (10 баллов)
Гражданин Сидоров на 6 лет старше своей жены гражданки Сидоровой. Однажды Сидоров обнаружил, что ровно половину своей жизни он провёл в браке с Сидоровой. Ровно через 14 лет после этого Сидорова обнаружила, что она провела в браке с Сидоровым ровно две третьих своей жизни. Сколько лет будет гражданину и гражданке Сидоровой, когда они отпразднуют золотую свадьбу – пятидесятилетие своей супружеской жизни?
Ответ. 76 и 70. **Решение**. Обозначим через x возраст, в котором Сидоров производил свои подсчёты. Тогда возраст Сидоровой в этот момент составлял x–6 лет, а в момент заключения брака им было $\frac{x}{2}$ и $\left(\frac{x}{2}-6\right)$ лет соответственно. Последнее условие позволяет сопоставить уравнение $x+8-\left(\frac{x}{2}-6\right)=\frac{2}{3}(x+8)\Rightarrow\frac{x}{6}=14-\frac{16}{3}\Rightarrow x=52$. Итак, к моменту бракосочетания супругам было 26 лет и 20 лет. Из этого немедленно следует ответ.

Критерии:
Правильный ответ, полученный после угадывания одного из возрастов: $\mp$ (3 балла)
Составлено правильное уравнение, затем арифметическая ошибка: от $\pm$ (7 баллов)

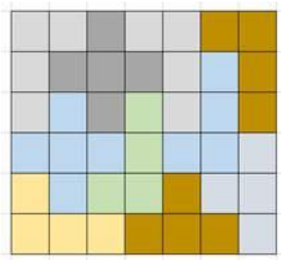
Задание 2 (15 баллов)
Петя записал в ряд 2021 число, отличное от нуля, и перемножил все пары соседних чисел. Среди полученных произведений оказалось 1010 положительных и 1010 отрицательных чисел. Вася записал все исходные числа в том же порядке, но по кругу, и тоже перемножил все пары соседних чисел. Сколько среди этих чисел будет положительных и сколько отрицательных? Ответ необходимо обосновать.
Ответ. 1011 положительных и 1010 отрицательных. **Решение**. Будем двигаться вдоль исходного ряда и фиксировать знаки чисел. Из условия следует, что знак при этом менялся 1010 раз – чётное число. Поэтому знаки первого и последнего числа совпадают. Значит, добавленное произведение будет положительным.
Критерии:
Только ответ и/или замечание что для нахождения искомого количества нужно понять только знак произведения крайних чисел: - (0 баллов)

Задание 3 (15 баллов)
Можно ли разрезать прямоугольник 6x7 на кресты из пяти клеток, фигурки Г-тетрамино и фигурки Т-тетрамино? Если можно, то сколько пятиклеточных крестов может быть в таком разрезании?



Ответ. Можно. При этом получится два креста и восемь четырёхклеточных фигурок.
Решение. Пусть x и y – число четырёхклеточных и пятиклеточных фигурок соответственно. Тогда получаем уравнение $4x+5y=42$, из которого видно, что y – чётное число, не кратное 4 и не превосходящее 8. То есть, либо 2, либо 6. Но случай $x=3$, $y=6$ невозможен, поскольку угловые клетки нельзя покрыть пятиклеточными крестами и

четырёхклеточных фигур должно быть хотя бы четыре. Случай x=8, y=2 изображён на рисунке.



Критерии:
Только доказано, что крестов либо 2 либо 6:
Только приведён пример такого разрезания: $\frac{+}{2}$ (10 баллов)
Приведён пример такого разрезания и доказано, что крестов 2 или 6: от $\pm$ (11 баллов)

Задание 4 (20 баллов)
Пара <u>различных</u> натуральных чисел (a,b) называется удачной, если сумма наибольшего собственного делителя числа a и наименьшего собственного делителя числа b равна сумме наименьшего собственного делителя числа a и наибольшего собственного делителя числа b. Существует ли миллион удачных пар? Собственный делитель натурального числа – любой делитель, отличный от 1 и самого числа.
Решение. Да, существует. Их существует даже бесконечно много. Например, годится и любая пара чисел вида $a = 4n, b = 6n + 3$, поскольку у первого числа наибольший и наименьший 2 и $2n$, а у второго 3 и $2n$+1. Также подходят пары вида p^2 и q^2, где p и q- различные простые числа.
Критерии:
Решение опирается на неверное утверждение вида «наименьший собственный делитель $3(n+1)$ это 3» - не более $\frac{+}{2}$ (10 баллов)

Задание 5 (20 баллов)
Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B. На стороне AC выбрана точка K такая, что $\angle CBK$=15°. На луче ВК отмечена точка M такая, что $\angle ACM$ = 90°. Докажите, что AC=BM.
Доказательство. Опустим из вершины прямого угла B перпендикуляр BE на гипотенузу. При этом точка E совпадёт с серединой гипотенузы, т.е. AC=2CE. В треугольнике BEK $\angle EBK = 45^\circ = 15^\circ = 30^\circ \Rightarrow BK = 2EK$. В то же время в треугольнике CMK $\angle MKC = 60^\circ \Rightarrow \angle MKC = 30^\circ \Rightarrow MK = 2CK$. Значит, BM=2EC=AC, что и требовалось.

Задание 6 (20 баллов)
Имеется 999 палочек длин 1, 2, 3, …, 999. Их выкладывают по кругу в некотором порядке. Обязательно ли найдутся лежащие подряд три палочки, из которых можно сложить треугольник?
Решение. Не обязательно. Условие означает, что среди любых трёх подряд лежащих палочек наименьшая будет больше разности двух других. Приведём конструкцию, для которой это выполняться не будет. Будем брать не 999 палочек, а любое их количество, кратное трём. При этом вместо палочек будем работать с набором чисел 1, 2, 3, …, 3k. Сперва выложим круг из 2k чисел от k+1 до 3k: 2k, 2k+1, 2k-1, 2k+2, 2k-2, 2k+3, …, k+2, 3k-1, k+1, 3k. Разницы между соседями будут таковы: 1, 2, 3, …, 2k-2, 2k-1, k. Затем вставим числа 1, 2, …, k в промежутки с разностями 1, 3, 5, …, 2k-1 соответственно. При

этом во все промежутки, кроме первого, вставляется число меньшее разности. Для первой тройки 2k, 2k+1, 1 неравенство треугольника также не выполняется.
Критерии:
Приведён правильный пример, но не доказано, что он работает: ± (14 баллов)

Всероссийская олимпиада школьников «Высшая проба» 2 этап, 2021