

## Решения и критерии, 11 класс.

Во всех критериях пропущено в виду самоочевидности, что полное решение стоит полный балл.

### №1

**Условие.** В этой задаче запись  $x \pmod n$ , где  $x$  – целое а  $n$  – натуральное, обозначает такое целое число  $y$  от 0 до  $n-1$ , что  $x-y$  делится на  $n$ . Существует ли такая функция  $f$ , определенная для целых значений аргумента и принимающая целые значения, что при любом целом  $x$  верно

$$f((x^2 + 1) \pmod 7) = (f(x)^2 + 1) \pmod{11}?$$

*Автор: В. Тиморин*

**Решение.** Стандартным ходом при решении задач на функциональные уравнения является подставить какое-то значение переменной, при котором два часто возникающих и не равных друг-другу тождественно выражения оказываются равны, и посмотреть, какие следствия из этого удастся вывести. Применительно к данной задаче на роль такой подстановки простится значение  $x_0$ , для которого выполнялось бы  $x_0 = x_0^2 + 1 \pmod 7$ .

Задумаемся, а существует ли такое  $x_0$ ? Условие равносильно квадратному уравнению в остатках:  $x_0^2 - x_0 + 1 \equiv 0$  (в этом абзаце все сравнимости по модулю 7), эквивалентно  $x_0 \equiv \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \equiv \frac{1 \pm \sqrt{-3+7}}{2} \equiv \{\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}\} \equiv \{\frac{3+7}{2}, \frac{-1+7}{2}\} \equiv \{5, 3\}$ . Или можно было просто перебором остатков, благо их всего 7, убедиться, что любой из 3 и 5 подходят.

Что же нам дает равенство  $3 = 3^2 + 1 \pmod 7$ ? Просится от обеих частей взять функцию  $f$ , а затем воспользоваться условием задачи. Имеем:  $f(3) = f((3^2 + 1) \pmod 7) = (f(3)^2 + 1) \pmod{11}$ . Чтобы подчеркнуть полученное, обозначим  $f(3) = y$  и выбросим среднюю часть:  $y = (y^2 + 1) \pmod{11}$ . Отсюда следует  $y^2 - y + 1 \equiv 0$  (в этом абзаце все сравнимости по модулю 11), отметим что это именно следствие а не равносильность. Выясним, имеет ли сравнимость решения, действуя стандартно  $y \equiv \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ . А извлекается ли квадратный корень из -3 по модулю 11? Заметим что  $1^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1$ ,  $2^2 \equiv (-2)^2 \equiv 4$ ,  $3^2 \equiv (-3)^2 \equiv 9$ ,  $4^2 \equiv (-4)^2 \equiv 5$  и  $5^2 \equiv (-5)^2 \equiv 3$ . Мы перебрали все остатки, среди квадратов не нашлось -3, значит корень не извлекается, значит уравнение  $y^2 - y + 1 \equiv 0$  не имеет решений.

Итак, требуемой функции  $f$  не существует.

### Критерии.

**А0** Правильный ответ без доказательства -. и 0 баллов

**А9** Есть все, кроме доказательства того, что нужный остаток не является квадратичным вычетом по модулю 11, или любое эквивалентное утверждение (данный квадратный трехчлен не имеет корней по модулю 11), про которое указан способ проверить его конечной последовательностью вычислений: +. и полный балл.

Обратите внимание: под данный критерий не попадают утверждения, не имеющие явной отсылки к модулю, по которому могут быть доказаны конечным перебором. Типичный пример – утверждение “число вида  $44k - 3$  при целом  $k$  не может быть квадратом целого числа” не подпадает под данный критерий.

### №2

**Условие.** Вася пришел в казино, имея один вшэ-коин (единственную в мире виртуальную валюту, которую можно делить на любые части; например, можно поставить на кон  $\frac{\pi}{10}$  вшэ-коина). В казино игрокам предлагается делать ставки на цвет шара, который будет вытащен из ящика. Фиксировано число  $p$ , причем  $1 < p < 2$ . Если цвет вытасченного шара совпадает с тем, на который игрок поставил  $x$  денег – игрок получит назад  $px$  денег, если не совпадает – не получит ничего. Для ставок в каждом раунде можно использовать не только деньги, имевшиеся к началу игры, но и выигрыши прошлых раундов. Перед началом игры Вася смог подсмотреть, что в ящик положили 3 черных и 3 красных шара (других шаров нет), сыгранные шары обратно в ящик не возвращаются, игра происходит пока ящик не опустеет. Какую максимальную сумму Вася может гарантированно иметь к концу розыгрыша?

Автор: Г. Челмоков

**Решение.** Заполним табличку: в клетке  $(i, j)$  запишем, на какое максимальное число Вася может гарантированно к концу игры умножить имеющуюся у него сейчас сумму, если сейчас в ящике осталось  $i$  черных и  $j$  красных шаров. Легко понять, что стоит с краю: если уже не осталось черных шаров, то Вася может смело ставить все деньги на красный шар, соответственно увеличивая капитал в  $p$  раз за каждый из оставшихся красных шаров. Аналогично если не осталось красных. Это и отмечено в таблице ниже.

3	$p^3$			
2	$p^2$			
1	$p$			
0	1	$p$	$p^2$	$p^3$
Черных шаров				
Красных шаров				

Теперь поймем, что должно стоять в клетке  $(i, j)$  если мы уже знаем, что в клетках  $(i - 1, j)$  и  $(i, j - 1)$  стоят числа  $x$  и  $y$  соответственно. Пусть для определенности  $x \leq y$ .

Во-первых, в оптимальной стратегии Вася не должен делать положительные ставки на оба исхода. В самом деле, пусть по своей стратегии он должен сейчас поставить суммы  $a$  и  $b$ , причем  $a \geq b > 0$ . Тогда пусть вместо этого он поставит  $a - b$  денег на тот исход, на который должен был ставить  $a$ , и на  $2b$  больше денег оставит не поставленными. Тогда при любом исходе он будет иметь на  $(2 - p)b$  денег больше, чем имел бы, если бы ставил  $a$  и  $b$ .

Теперь поймем, сколько же Вася должен ставить. Ставить он должен на тот цвет, выпадение которого приводит в клетку с числом  $x$  (напомним,  $x \leq y$ ), в противном случае если этот цвет выпадет, Вася не сможет увеличить свой капитал более чем в  $x$  раз, а мы строим стратегию лучше. Для определенности обозначим количество васиных денег через  $D$  и пусть он поставит  $\varepsilon D$  денег на цвет, выпадение которого приводит в клетку с числом  $x$ . Тогда если выпал этот цвет – Вася оказался в этой клетке имея  $(1 + (p - 1)\varepsilon)D$  денег, соответственно закончит игру, имея не менее  $(1 + (p - 1)\varepsilon)xD$  денег (и не может гарантированно иметь больше). Если же выпал цвет, приводящий в клетку с числом  $y$ , Вася попал туда, имея  $(1 - \varepsilon)D$  денег, значит закончит игру, имея не меньше  $(1 - \varepsilon)yD$  денег (и не может гарантированно иметь больше). Итак, гарантированный минимум при этой стратегии есть  $\min((1 + (p - 1)\varepsilon)xD, (1 - \varepsilon)yD)$ . Поскольку первая из функций под минимумом возрастающая по  $\varepsilon$ , а вторая – убывающая, максимум минимума достигается при значении  $\varepsilon$ , для которого функции принимают одно значение. Имеем

$$(1 + (p - 1)\varepsilon)xD = (1 - \varepsilon)yD;$$

откуда  $\varepsilon = \frac{y-x}{y+(p-1)x}$ . То есть  $(1 + (p - 1)\varepsilon)xD = (1 - \varepsilon)yD = \frac{pxy}{y+(p-1)x}D$ . Иными словами, в интересующей нас клетке должно стоять число  $\frac{pxy}{y+(p-1)x}$ . Пользуясь этой формулой и значениями в клетках на краях, заполним всю табличку:

3	$p^3$	$\frac{p^4}{3p-2}$	$\frac{p^5}{5p^2-6p+2}$	$\frac{p^5}{5p^2-6p+2}$
2	$p^2$	$\frac{p^3}{2p-1}$	$\frac{p^3}{2p-1}$	$\frac{p^5}{5p^2-6p+2}$
1	$p$	$p$	$\frac{p^3}{2p-1}$	$\frac{p^4}{3p-2}$
0	1	$p$	$p^2$	$p^3$
Черных шаров				
Красных шаров				

### Критерии.

**А0** Правильный ответ без доказательства – и 0 баллов. Любые стратегии без доказательства оптимальности (или с неверным доказательством оптимальности) – и 0 баллов. Верно доказанная лемма, что не выгодно ставить одновременно на оба цвета – 0 баллов (однако и решение, полное за исключением отсутствия объяснения, что не надо ставить на оба цвета одновременно, приравнивается к полному).

**А3** Верно разобрана стратегия от момента, когда остались два шара одного цвета и один другого:  $\mp$  и 8 баллов.

**А7** При верной логике решения на последнем шаге допущена арифметическая ошибка, приведшая к неверному ответу:  $\pm$  и 14 баллов.

**А8** Решение, полное за исключением отсутствия объяснения, что не надо ставить на оба цвета одновременно:  $+$ . и 17 баллов.

### №3

Гипотенуза  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  касается вписанной и соответствующей невписанной окружностей в точках  $T_1, T_2$  соответственно. Окружность, проходящая через середины сторон, касается этих же окружностей в точках  $S_1, S_2$  соответственно. Докажите, что  $\angle S_1CT_1 = \angle S_2CT_2$ .

*Автор: А. Заславский*

**Решение.** Введем обозначения для длин сторон:  $BC = a, AC = b, AB = c$ . Сделаем инверсию с центром  $C$  и радиусом  $R = \sqrt{\frac{1}{2}ab}$  с симметрией относительно биссектрисы угла  $C$ . Гипотенуза и окружность Эйлера треугольника переходят друг в друга. В самом деле, середины сторон прямоугольного треугольника и вершина его прямого угла образуют лежат в вершинах прямоугольника, значит все четыре на одной окружности. Значит при инверсии образ окружности – прямая, легко посчитать, что эта прямая отсекает от лучей  $CA$  и  $CB$  отрезки длины  $a$  и  $b$  соответственно, то есть симметрична  $AB$  относительно биссектрисы угла  $A$ .

**Лемма.** Вписанная и невписанная окружности треугольника  $ABC$  переходят друг в друга.

*Доказательство.* Действительно, касательная из  $C$  к вписанной окружности равна её радиусу  $r$ , а касательная из  $C$  к невписанной окружности равна полупериметру  $p$ . Таким образом, их произведение  $pr = S(ABC)$  – площади треугольника  $ABC$ . Итак,  $pr = R^2$ .  $\square$

Следовательно  $T_1$  переходит в  $S_2$ , а  $T_2$  переходит в  $S_1$ . Угол  $\angle S_1CT_1$  переходит в угол  $\angle S_2CT_2$ , значит они равны.

**Критерии.** **А7** полное решение за исключением доказательства, что при инверсиметрии вписанная окружность переходит во невписанную:  $\pm$  и 18 баллов.

### №4

Найдите все действительные числа  $d$ , для которых существуют многочлены от одной переменной  $P$  и  $Q$ , такие что равенство

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{P(x+d)}{Q(x+d)} = \frac{1}{x(x+1)}$$

выполняется при всех значениях  $x$  кроме конечного числа.

*Автор: Г. Челмоков*

**Первое решение.** Сразу заметим, что при  $d = 0$  равенство из условия невозможно, так что далее мы везде считаем, что  $d \neq 0$  даже когда не напоминаем об этом явно. (это тривиальное замечание, но если его не сделать – можно потерять немного баллов)

Предположим, что такие многочлены  $P$  и  $Q$  нашлись. Тогда можно считать, что они взаимно просты (иначе поделим оба на общий множитель – новая пара тоже удовлетворяет условию), и у  $Q$  старший коэффициент равен 1 (домножим  $P$  и  $Q$  на константу, чтобы старший коэффициент стал равен 1). Введем обозначение для разложения  $Q$  на линейные множители (естественно, воспользовавшись существованием такого разложения в комплексных числах):

$$Q(x) = (x - \alpha_1)^{n_1}(x - \alpha_2)^{n_2} \dots (x - \alpha_k)^{n_k}.$$

Далее нам потребуется известное утверждение о разложении рациональной функции в сумму простейших дробей.

**Лемма (о разложении на простейшие дроби).** Существует и единственно представление вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_0(x) + \frac{P_1(x)}{(x - \alpha_1)^{n_1}} + \frac{P_2(x)}{(x - \alpha_2)^{n_2}} + \dots + \frac{P_k(x)}{(x - \alpha_k)^{n_k}}; \quad (*)$$

где степень  $P_i(x)$  меньше  $n_i$  при  $1 \leq i \leq k$ , причем  $P_i \neq 0$ .

Это стандартный факт, доказательство которого можно прочесть во многих учебниках, и даже в Википедии в статье “Разложение рациональной дроби на простейшие”.

Для комплексного числа  $\alpha$  множество чисел вида  $\alpha + md$ , где  $m \in \mathbb{Z}$  – целое, будем называть *цепью* числа  $\alpha$ .

**Ключевое утверждение:** если  $\alpha$  – корень  $Q$ , то числа 0 и 1 принадлежат цепи  $\alpha$ .

*Доказательство.* Пусть  $\alpha$  – корень  $Q$ , тогда обозначим через  $m_-$  и  $m_+$  такие минимальное и максимальное значения  $m$ , при которых  $\alpha + md$  является корнем  $Q$ . Заметим, что  $m_-$  и  $m_+$  определены корректно: множество значений  $m$  не пусто (поскольку 0 подходит) и конечно, поскольку у  $Q$  конечное число корней (первое место, в котором важно, что  $d \neq 0$ ). Тогда пусть не оба числа 0 и 1 лежат в цепи  $\alpha$ . Тогда одно из двух чисел  $\alpha + (m_- - 1)d$  и  $\alpha + m_+d$  не является ни 0 ни 1 (второе место: нам важно, что  $\alpha + (m_- - 1)d$  и  $\alpha + m_+ + d$  – два разных числа). Рассмотрим эти два случая.

Пусть  $\alpha + m_+d = \alpha_i$  – не равно ни 0 ни 1. Посмотрим на равенство из условия

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{P(x+d)}{Q(x+d)} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

и разложим левую часть на простейшие дроби. Поскольку  $\alpha_i$  – корень  $Q$ , в разложение  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  входит член со знаменателем  $(x - \alpha_i)^{n_i}$  и ненулевым числителем. Но  $\alpha_i$  – не корень  $Q(x+d)$ , иначе  $\alpha_i + d = \alpha + (m_+ + 1)d$  было бы корнем  $Q(x)$ , что противоречило бы максимальной  $m_+$ . Тогда член со знаменателем  $(x - \alpha_i)^{n_i}$  не входит в разложение  $\frac{P(x+d)}{Q(x+d)}$ , значит члену с таким знаменателем слева не с чем сократиться – но он не входит в правую часть – противоречие.

Аналогично пусть  $\alpha + (m_- - 1)d = \alpha_i - d$  – не равно ни 0 ни 1. Посмотрим на равенство из условия

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{P(x+d)}{Q(x+d)} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

и разложим левую часть на простейшие дроби. Поскольку  $\alpha_i - d$  – корень  $Q(x+d)$ , в разложение  $\frac{P(x+d)}{Q(x+d)}$  входит член со знаменателем  $(x - \alpha_i + d)^{n_i}$  и ненулевым числителем. Но  $\alpha_i - d = \alpha + (m_- - 1)d$  – не корень  $Q(x)$ , обратное противоречило бы минимальности  $m_-$ . Тогда член со знаменателем  $(x - \alpha_i + d)^{n_i}$  не входит в разложение  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , значит члену с таким знаменателем слева не с чем сократиться – но он не входит в правую часть – противоречие.  $\square$

Итак, мы доказали, что если у многочлена  $Q$  есть комплексные корни, то в цепь этого корня входят числа 0 и 1, то есть выполняется равенство  $d = \frac{1}{m}$  для какого-то целого  $m$ . Если же у  $Q$  нет комплексных корней, то он – ненулевая константа, то есть  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  и  $\frac{P(x+d)}{Q(x+d)}$  – многочлены, тогда их разность не может равняться  $\frac{1}{x(x+1)}$  (это еще одно почти тривиальное замечание, не сделав которое можно потерять немного баллов).

Осталось показать, что все значения вида  $d = \frac{1}{m}$  где  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $m \neq 0$  подходят. Для  $m > 0$  достаточно взять функцию

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x + \frac{1}{m}} + \frac{1}{x + \frac{2}{m}} + \dots + \frac{1}{x + \frac{m-1}{m}}$$

и привести сумму к общему знаменателю, числитель взять в качестве  $P$  а знаменатель –  $Q$ . Для  $m < 0$  то же самое сделать с суммой

$$\frac{-1}{x+1} + \frac{-1}{x + \frac{-m-1}{-m}} + \frac{-1}{x + \frac{-m-2}{-m}} + \dots + \frac{-1}{x + \frac{1}{-m}}.$$

### Критерии.

**A** – здесь оцениваются продвижения в построении примеров для подходящих  $d$ .

**A0** Примеры только для значений 1 и -1 стоят 0 баллов.

**A7** Явным образом указано  $Q$ , на коэффициенты  $P$  выписана система линейных уравнений. Сказано, что она верхнетреугольная, но нет упоминания (тем более – доказательства), что на диагонали коэффициенты не нулевые – 7 баллов.

**A9** Пример при всех возможных значениях  $d - \mp$  и 10 баллов.

**B** – здесь оцениваются продвижения в доказательстве, что не подходят все не подходящие значения  $d$ . Все пункты с этой литерой аддитивны с серией А.

**B3** При альтернативном пути решения доказано, что существует некоторый многочлен  $R(x)$  (степень которого не зависит от  $d$ ), такой что  $R(x)Q(x)$  делится на  $Q(x+d) - 10$  баллов.

**B4** Доказано, что  $(x+1)Q(x)$  делится на  $Q(x+d)$ : 15 баллов.

**B6** В лемме о разложении на простейшие нет упоминания, что числитель у любого корня ненулевой – 11 баллов.

**B8** Лемма о разложении на простейшие дроби сформулирована но не доказывалась или доказывалась неверно – то же, что в B9

**B9** Полное доказательство, что подходят только эти значения  $d$ : 22 балла (в сумме с A9 дает максимальный балл по задаче).

## №5

Через  $X(\alpha)$  будем обозначать точку с координатами  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$  (все такие лежат на окружности радиуса 1 с центром в начале координат). Выбрали произвольный угол  $\phi$  и провели хорды  $P(\phi)P(2022\phi), P(2022\phi)P(2022^2\phi), \dots$  (на шаге номер  $n$  проводится хорда  $P(2022^{n-1}\phi)P(2022^n\phi)$ ). Если хорда уже была проведена – она не проводится второй раз. Оказалось, что все проведенные хорды не пересекаются иначе чем по концам. Докажите, что всего проведено конечное число хорд.

*Автор: В. Тиморин*

### Решение.

Нам будет полезен аналог целой части  $\langle x \rangle$ , выражающий для двух чисел с разностью  $x$  расстояние по окружности между образами этих чисел, если намотать числовую прямую на единичную окружность: будем говорить, что  $\langle x \rangle = \{x\}$  при  $\{x\} \leq \frac{1}{2}$  и  $\langle x \rangle = 1 - \{x\}$  при  $\{x\} > \frac{1}{2}$  (здесь  $\{x\}$  обозначает обычную целую часть числа  $x$ ). Тогда, например, если длина дуги между точками  $\alpha$  и  $\beta$  равна  $\phi$ , то длина дуги между  $2022\alpha$  и  $2022\beta$  равна  $\langle 2022\phi \rangle$ .

Предположим противное: что проведено бесконечное число хорд, но все они не пересекаются. Нам будет удобно представлять, что мы последовательно добавляем новые точки в порядке их номеров и рисуем получающиеся хорды.

Для краткости точку  $P(2022^n\phi)$  будем обозначать просто  $P_n$ . Заметим, что точки не повторяются: если бы оказалось, что  $P_m = P_n$  при  $m > n$ , то выполнялось бы  $P_{m+1} = P_{n+1}$ ,  $P_{m+2} = P_{n+2}$  и т.д., тогда число хорд было бы конечным. Итак, каждая новая точка попадает строго между ранее поставленными.

Определим по индукции понятие *активной дуги  $n$ -го шага*. Для натурального  $n = 1$  будем ей считать ту из двух дуг  $P_0P_1$ , на которую попадает  $P_2$ . Заметим, что тогда все точки  $P_n$  лежат на активной дуге первого шага. В самом деле, пусть все точки от 2-й до  $m$ -й лежат на активной дуге 1-го шага, а  $m+1$ -я там не лежит. Тогда хорды  $P_0P_1$  и  $P_mP_{m+1}$  пересекаются.

Теперь предположим, что мы уже индукцией по  $n$  доказали, что все точки  $P_m$  попадают на активную дугу  $n$ -го шага при  $m > n$ . Определим активную дугу  $n+1$ -го шага.  $P_{n+1}$  лежит на  $n$ -й активной дуге, значит делит ее на две части. На одну из этих частей попадает точка  $P_{n+2}$  – эту часть и будем называть активной дугой  $n+1$ -го шага. Тогда чтобы индукция работала нам осталось доказать, что все точки  $P_m$  лежат на этой дуге при  $m \geq n+2$ . Понятно, что концы дуги – это какие-то из предыдущих точек  $P$ , значит есть фрагмент ломанной, соединяющий их. Значит если  $P_m$  еще лежит на дуге, а  $P_{m+1}$  – уже нет, и  $P_{m+2}$  не совпадает ни с одной из предыдущих точек  $P$  (что упоминалось ранее) – значит,  $P_mP_{m+1}$  пересекается с указанным фрагментом ломанной.

Как легко видеть, каждая следующая активная дуга является подмножеством предыдущей. Более того, обозначим через  $\phi_n$ , длину активной дуги, а через  $\psi_n$  – длину дуги  $P_{n-1}P_n$  (той из двух, которая лежит внутри активной). Тогда или

$$\phi_n = \psi_n \quad \text{или} \quad \phi_n = \phi_{n-1} - \psi_n. \quad (*)$$

Поскольку  $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$  – невозрастающая последовательность положительных чисел, она имеет предел. Докажем, что этого не может быть.

Если предел равен нулю, то нулю же равен и предел последовательности  $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ , поскольку  $\psi_n \leq \phi_{n-1}$ . Но заметим, что  $\psi_{n+1} = \langle 2022\psi_n \rangle$ . То есть если  $\psi_n \leq \frac{1}{4044}$ , то  $\psi_{n+1} = 2022\psi_n$ . Кроме того,  $\psi_n$  всегда не равно нулю (иначе две точки совпали). Значит для  $\varepsilon = \frac{1}{4044}$  в последовательности встречаются члены большие  $\varepsilon$  со сколь угодно большими номерами – ноль не является пределом.

Пусть предел равен положительному числу  $a$ . Тогда по (\*) последовательность  $\psi_n$  разбилась на две подпоследовательности, предел одной равен нулю, предел другой –  $a$ , причем по доказанному выше вторая содержит бесконечное число членов. Заметим, что  $a$  – неподвижная точка преобразования  $\psi \rightarrow \langle 2022\psi \rangle$ . Тогда аналогично  $|\psi_{n+1} - a| = 2022|\psi_n - a|$  если  $|\psi_n - a| \leq \frac{1}{4044}$ .

Выберем  $\varepsilon < \frac{a}{20220}$ , будем говорить о числах 0 и  $a$  как о двух пределах. Начиная с какого-то номера все  $\psi_n$  должны попадать в  $\varepsilon$ -окрестность одного из двух пределов. Но тогда при переходе от  $\psi_n$  к  $\psi_{n+1}$  расстояние до предела будет расти в 2022 раза – рано или поздно  $\psi_n$  выскочит из  $\varepsilon$ -окрестности текущего предела и еще не дотянется до  $\varepsilon$ -окрестности другого предела.

**Комментарии.** Многие участники пытались доказывать факт, что при фиксированных  $\alpha$  и  $\phi$  углы вида  $\alpha^n \phi$  (при всех натуральных  $n$ ) всюду плотны на окружности. По-видимому, перепутав его с фактом, что для не соизмеримого с  $\pi$  угла  $\alpha$  углы вида  $n\alpha$  всюду плотны на окружности. Второй факт верен, первый нет.

### Критерии.

**A0** Утверждения вида “если  $\frac{\phi}{\pi}$  рационально, то различных точек конечное число”, если точка повторилась то повторяется и все последующие, если точек конечное число то ихорд конечное число: 0 баллов.

**A3** Четкая формулировка и доказательство леммы, что последовательность длин хорд не может иметь предел: 16 баллов.

**A4** В большей общности: что последовательность длин хорд не может разбиваться на две, каждая из которых имеет предел (причем одна – нулевой): 24 балла. Либо аналогичное утверждение про последовательность точек, а не длин хорд между последовательными точками.

**B3** Четкая структура решения, сводящая задачу к лемме из критерия A4, но без доказательства этой леммы: 18 баллов.

## №6

Фокусник и его Ассистент готовятся показать следующий фокус. Фокуснику завяжут глаза, после чего один из зрителей напишет на доске 60-битное слово (последовательность из 60 нулей и единиц). Ассистент уверен, что сможет незаметно сообщить фокуснику 44 бита (не обязательно написанные в слове, можно вычислять любые функции). После чего Фокусник должен будет назвать слово. Для какого наибольшего числа  $C$  Фокусник и Ассистент могут придумать стратегию, позволяющую всегда назвать слово, совпавшее хотя бы в  $C$  битах с написанным зрителем.

*Автор: Г. Челноков*

**Ответ:**  $C = 56$ .

Докажем оценку  $C \leq 56$ . Пусть существует стратегия, позволяющая ошибаться не более чем в  $k$  битах (т.е.  $C = 60 - k$ ). Тогда заметим, что Наблюдатель, знающий стратегию Фокусника, сообщенное Ассистентом слово, и набор бит, в которых ошибся Фокусник, может восстановить написанное Зрителем слово. В самом деле, Наблюдатель берет слово, которое должен был написать Фокусник, и меняет его в тех местах, где Фокусник ошибся. Значит количество различных пар вида “слово сообщенное Ассистентом и набор мест, в которых фокусник ошибся” не меньше, чем различных слов, которые мог написать зритель. То есть

$$2^{44} \left( \binom{60}{0} + \binom{60}{1} + \dots + \binom{60}{k} \right) \geq 2^{60}.$$

Перепишем в виде  $\left( \binom{60}{0} + \binom{60}{1} + \dots + \binom{60}{k} \right) \geq 2^{16}$ , и заметим, что при  $k \leq 3$  неравенство неверно:  $2^{16} > 64000$ , но  $\binom{60}{0} + \binom{60}{1} + \binom{60}{2} + \binom{60}{3} < 1 + 60 + \frac{60^2}{2} + \frac{60^3}{6} = 1 + 60 + 1800 + 36000$ .

Теперь попробуем показать, из каких соображений строится пример. Для начала напомним конструкцию, известную как математикам так и программистам: двоичный код длины 15, позволяющий передать 11 бит полезной информации и исправить ошибку не более чем в одном бите (также известен как 15-битный код Хэмминга). Построим его.

Для начала заметим, что есть ровно 11 слов длины 4 из нулей и единиц, содержащих хотя бы две единицы (всего слов  $2^4 = 16$ , минус одно из одних нулей, минус четыре с одной единицей). Припишем такие слова номерам от 1 до 11 как угодно, например как в таблице:

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11
0011	0101	1001	0110	1010	1100	0111	1011	1101	1110	1111

Теперь построим

код таким образом: в первые 11 бит запишем те биты, которые хотим передать (первые 11 позиций будем называть *информационными*). В последние 4 бита запишем следующие контрольные суммы. В 12-й запишем сумму по модулю два тех из первых 11 бит, приписанное 4-значное число которых имеет 1 в первом разряде, то есть биты №№ 3,5,6,8,9,10,11. В 13-й – сумму тех из первых 11 бит, приписанное 4-значное число которых имеет 1 во втором разряде, в 14-й – сумму бит, имеющих 1 в третьем разряде приписанного слова, в 15-й – в четвертом. Покажем, почему этот код позволяет исправить одну ошибку при передаче.

Пусть Получатель получил кодовое слово, возможно искаженное в одном бите. Получатель точно так же по первым 11 битам посчитает 4 контрольные суммы, и сравнит их с четырьмя полученными. Если совпали все четыре – то слово дошло без искажений. В самом деле, если бы искажился контрольный бит – в нем было бы расхождение, а если информационный – то расхождения были бы во всех контрольных, в которые он входит. Аналогично, если расхождение есть ровно в одном контрольном бите, то искажился именно он. В самом деле, если искажился другой контрольный – то все информационные дошли правильно, тогда в этом контрольном расхождения бы не было; а если искажился информационный, то все контрольные дошли правильно, и тогда расхождения были бы во всех контрольных, в которые входит искаженный информационный, а таких контрольных хотя бы два (именно за этим мы приписывали комбинации нулей и единиц, содержащих хотя бы две единицы). По аналогичным соображениям если получатель видит не менее двух расхождений с контрольными битами, то искажен точно информационный. Тогда достаточно из 11 информационных позиций выбрать ту, в приписанном 4-битном слове которой единицы стоят ровно на тех местах, на которых есть расхождения с контрольными суммами – это и есть искаженная позиция.

Теперь подумаем в других терминах, что же мы построили. У нас есть код из  $2^{11}$  кодовых слов. Каждое из этих слов можно исказить 16 способами (ничего не менять, или изменить один из 15 бит). Все  $16 \times 2^{11}$  полученных в результате слов будут разными. В самом деле, если бы какое-то слово  $w$  получалось двумя разными способами: искажением кодового слова  $u_1$  и искажением кодового слова  $u_2$  (в обоих случаях – не более чем в одном бите), то код бы не исправлял одну ошибку – Получатель может получить слово  $w$ , но в этом случае не может понять, послали ему  $u_1$  или  $u_2$ . Итак, все  $16 \times 2^{11}$  слов разные, но это означает что вообще любое из слов длины 15 получается искажением какого-то из кодовых слов не более чем в одном бите.

На этом и построим стратегию Фокусника и Ассистента. Ассистент видит написанное зрителем 60-битное слово, режет его на четыре 15-битных слова  $w_1, w_2, w_3, w_4$ . Как доказано выше, для них найдутся кодовые слова  $u_1, u_2, u_3, u_4$ , такие что  $w_i$  отличается от  $u_i$  не более чем в одном символе. Тогда Ассистент выбрасывает из каждого кодового слова контрольные символы, получает четыре слова длины 11, то есть одно слово длины 44. Его он и передает Фокуснику. Фокусник восстанавливает контрольные суммы, получает слово  $u_1 u_2 u_3 u_4$ , отличающееся от исходного максимум в четырех битах – победа.

### Критерии.

**А:** эти критерии оценивают прогресс в доказательстве оценки  $C \leq 56$ .

**А0** Голый ответ - и 0 баллов. Доказательство, что  $C < 60$ : также 0 баллов.

**А7** Получено ключевое утверждение, что если можно ошибиться не более  $k$  раз (т.е.  $C = 60 - k$ ) то  $\binom{60}{0} + \binom{60}{1} + \dots + \binom{60}{k} \geq 2^{16}$ , но не указано правильное значение  $k$ , для которого неравенство становится верным:  $\mp$  и 18 баллов.

**А9** Корректно доказанная оценка  $\mp$  и 20 баллов.

**Баллы за разные литеры складываются**

**В0** Построены любых алгоритмов, доказывающих  $C \geq 52$ : 0 баллов.

**В3** Мечты в духе “нас бы устроил Хэминговский код с такими-то свойствами”, если требуется исправлять больше одной ошибки, и нет соображений, как его строить – 10 баллов.

**В8** Пример чистый по модулю существования совершенного кода Хэминга, исправляющего одну ошибку, которое постулировано но не доказано – то же, что В9.

**В9** Пример  $56 - +/2$  и 30 баллов (таким образом А9+В9 дает полную цену задачи)