7 класс

1. Вася составил из шести различных цифр два трехзначных числа, в сумме дающих 533. Чему может быть равна сумма исходных цифр? **Решение.** Воспользовавшись признаком делимости на 9, поймем, что сумма этих шести цифр должна быть сравнима по модулю 9 с 533, т. е. с 2, и быть не меньше $0+1+2+3+4+5=15$. Значит, она 20, 29 или 38. Примеры: $126+407$, $146+387$. Примера на 38 не существует: 4 младших разряда дают максимум $6+7+8+9=30$, значит, старшие — не менее 8, а должны не более 5. (Можно решить задачу и без признака делимости на 9, изучая переносы в следующий разряд при сложении.) □

2. Есть 90 красных, 97 синих и 77 зелёных гирек. Красные гирьки по 90 г, синие — по 97 г, зелёные — по 77 г. Известно, что среди гирек есть фальшивая, которая весит меньше заявленного веса. Как найти цвет этой гирьки за два взвешивания на чашечных весах без гирь? **Решение.** Способ 1.

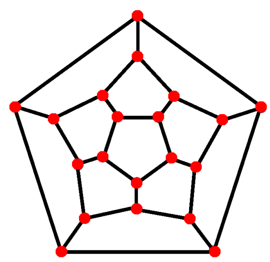
Первым взвешиванием положим на каждую чашу весов по 45 красных гирек. Неравенство будет означать, что красная — фальшивая. В случае равенства, вторым взвешиванием кладём 90 красных и 17 зеленых на одну чашу весов и 97 синих — на другую. Несложно заметить, что равенство $(97\cdot97=90\cdot90+17\cdot77)$ или перевес правой части будет указывать на фальшивость зеленой гирьки, перевес левой части — на фальшивость синей.

Способ 2, не использующий данные о весах гирек (предложен некоторыми участниками олимпиады).

Положим на каждую чашку по 45 красных и 38 зелёных гирек. Если весы в равновесии, то фальшивая — оставшаяся зелёная гирька или одна из синих; зелёную проверим вторым взвешиванием, сравнив с любой другой зелёной (которая точно настоящая). Если же весы после первого взвешивания не в равновесии, то фальшивая — красная или одна из зелёных; проверим красные, оставив при втором взвешивании только их (по 45 на каждой чашке).

□

3. Страна Додекаэдрия имеет 20 городов и 30 авиалиний между ними. Карта авиалиний Додекаэдрии показана на рисунке. В одном из городов находится Фантомас, которого хочет изловить полиция. Каждый день Фантомас перелетает в другой город, используя ровно одну авиалинию. Каждый вечер полиции становится известно, в каком городе находится Фантомас. За ночь полиция совместно с авиакомпанией закрывают одну авиалинию между какими-то двумя городами, но взамен они должны открыть новое авиасообщение между какими-нибудь городами, между которыми авиалинии на данный момент нет (возможно, она была закрыта ранее). Фантомас попадается, если утром не может никуда перелететь. Сможет ли полиция поймать Фантомаса? **Решение.**



Способ 1, в котором не требуется даже видеть Фантомаса, пока он не пойман.

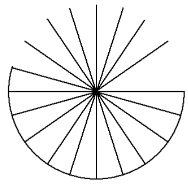
Полиция сможет поймать Фантомаса следующим образом: полицейские мысленно разбивают множество городов на две непересекающиеся группы А и Б по 10 городов.

Следующими действиями полицейские делает все авиалинии внутренними для группы А. Это возможно, т. к. в группе $(10\cdot9)/2=45$ возможных мест под авиалинии, а авиалиний всего 30.

Если Фантомас ещё не пойман, следующими действиями полиция перебрасывает линии так, чтобы они становились внутренними для группы Б. Т. к. на этом этапе линий между А и Б нет и не появляется, Фантомас не сможет перебраться в группу Б, и, тем самым, будет пойман, когда все 30 авиалиний станут внутренними для группы Б.

Способ 2. Допустим, Фантомас в вершине A, которая входит в грань $ABCDE$. Тогда полиция пять ночей подряд закрывает авиалинии, которые ведут из кольца $ABCDE$ в остальную страну. Причём это можно делать так, чтобы Фантомас оставался в одной из вершин $ABCDE$. Потом убираем рёбра AB, BC, CD, DE. Всё, Фантомас пойман на 11-й день. Очевидно, что в остальной стране провести 10 авиалиний нетрудно.

Способ 3. Заметим, что полиция может превратить граф дорог в любой другой, если в нём столько же рёбер, сколько в исходном (30). Например, участник олимпиады Александр Ульянов использовал граф, нарисованный справа. На таком графе ловить Фантомаса гораздо легче (например, примерно как в Способе 2).



Полезное замечание. Схема дорог Додекаэдрии представляет собой граф правильного додекаэдра. Поэтому все вершины города в ней равноправны, так же как и все пятиугольные циклы. То есть нет необходимости отдельно рассматривать случаи, когда начальный город находится «на внешнем контуре», «на внутреннем контуре» и т. д.

□

4. На доске нарисован прямоугольник, он разрезан на 4 прямоугольничка поменьше с помощью двух прямолинейных разрезов. Если к доске подойдёт Андрюша, то он назовёт площадь каждого из меньших прямоугольников (в некотором случайном порядке), а если его брат-близнец Кирюша — то он назовёт периметры. Кто-то из братьев подошел к доске, и по названным им четырём числам оказалось невозможно понять (не глядя на доску), кто из них подошёл. Могут ли все эти числа быть различными?

Решение. Заметим, что произведения площадей левого нижнего и правого верхнего прямоугольников разбиения равно произведению площадей левого верхнего и правого нижнего прямоугольников. Также заметим, что сумма периметров левого нижнего и правого верхнего прямоугольников разбиения равна сумме периметров левого верхнего и правого нижнего прямоугольников. Пусть a и c — самые большое и самое маленькое числа из написанных на доске. Тогда очевидно, что $ac = bd$ и $a + c = b + d$. Отсюда следует, что $a = b + d - c$, а значит, $(b + d - c)c = bd$. Преобразуем это в $(b - c)(c - d) = 0$ и придём к тому, что какие-то два числа равны между собой. □

5. Число 2401 равно четвёртой степени суммы своих цифр:

$$(2 + 4 + 0 + 1)^4 = 2401.$$

Докажите, что существует лишь конечное число натуральных чисел, обладающих таким же свойством. **Решение.** Четвёртая степень суммы цифр n-значного числа не превосходит $9^4 \cdot n^4$, а само число не меньше, чем $10^{n-1} > 9^4 \cdot 10^{n-5}$.

Осталось доказать, что $10^{n-5} > n^4$ при больших n. Докажем это по индукции для $n \geqslant 10$.

Действительно, при $n = 10$ это верно. При замене n на $n+1$ левая часть увеличивается в 10 раз, а правая — в $\left(\frac{n+1}{n}\right)^4 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^4 \leqslant \left(1 + \frac{1}{10}\right)^4 < 10$ раз. Значит, левая часть остаётся больше правой.

□

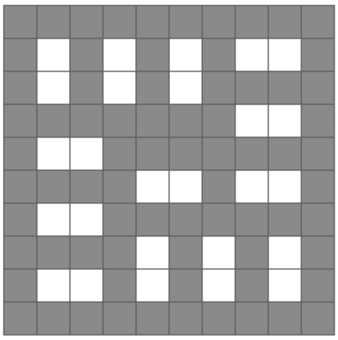
6. Есть полоска из 101 клетки, по ней может ходить фишка: на любое чётное число клеток вперёд, и на любое нечётное — назад. Вася и Петя хотят обойти своими фишками все клетки доски по разу: Вася — начиная с первой клетки, а Петя — начиная со пятидесятой. У кого больше способов это сделать?

Решение. Способов поровну. Представим себе, что это не полоска, а кольцо (соединим начало с концом), а двигаться можно только вперёд и только на чётное число клеток. Сделать ход на нечётное количество клеток назад равносильно тому, что сделать ход на чётное количество клеток вперёд на кольце. Получилась эквивалентная задача, в которой уже неважно, с какой клетки стартовать. □

7. Каждая клетка доски 10×10 покрашена в чёрный или белый цвет. Говорят, что клетка *не в своей тарелке*, если у неё хотя бы семь соседей не такого цвета, как она сама. (Соседями называются клетки, у которых есть общая сторона или общий угол.) Какое наибольшее количество белых клеток на доске одновременно могут быть не в своей тарелке?

Решение. Ответ: 26

Пример: 13 доминошек, не граничащих друг с другом и с краем доски.



Оценка. Назовем клетку не в своей тарелке НВСТ-клеткой. Для каждой НВСТ клетки нарисуем её *окрестность*: квадрат со стороной 2, у которого она в центре (его стороны идут не по сторонам сетки!). Белые НВСТ-клетки разбиваются на компоненты — одноклеточные, доминошки и косые доминошки. Они имеют окрестности размером 4, 6 и 7 клеток соответственно. Эти окрестности не пересекаются и лежат в центральном квадрате 9×9. Также можно заметить, что площадь окрестностей минимум втрое превосходит площадь самих клеток. Если НВСТ-клеток 27, то $27 \cdot 3 = 81$ (ровно втрое!), но отношение ровно 3 может быть, лишь если всё разбито на доминошки, а 27 нечётно. $\square$