5 класс

1. В доме 300 квартир. В квартирах, номера которых делятся на 5, живут кошки, а в остальных квартирах кошек нет. Если же сумма цифр номера квартиры делится на 5, то в такой квартире обязательно живёт собака, а в остальных квартирах собак нет. Сколько квартир, в которых живут и кошка, и собака?

Решение. Пусть номер квартиры имеет вид $\overline{abc}$, где a, b, c — цифры нóмера квартиры (некоторые из которых, возможно, равны 0). Номер квартиры, в которой живут кошка и собака, должен удовлетворять трём условиям:

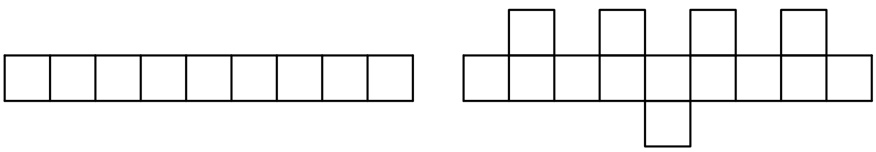
1. $\overline{abc} \leqslant 300$;
2. $\overline{abc}$ делится на 5;
3. $a + b + c$ делится на 5.

Из второго условия имеем, что c это 0 или 5. Следовательно, $a + b$ делится на 5 и $\overline{ab} \leqslant 30$. Поэтому $\overline{ab}$ это 00, 05, 14, 19, 23, 28. Значит, кошка и собака живут в квартирах 005, 050, 055, 140, 145, 190, 195, 230, 235, 280, 285 (квартиры с номером 000 в доме нет).

$\square$

2. Существует ли такая клетчатая фигурка, из которой можно вырезать ровно 7 клеток так, чтобы оставшаяся часть не развалилась на два куска, и можно семью способами вырезать всего по одной клетке так, чтоб остальная часть развалилась? Если два куска касаются только уголком, то они разваливаются.

Решение. Существует. Вот примеры:



Есть и другие варианты.

$\square$

3. Мила писала в прописях буквы М и Л. В конце она сосчитала, что 59 раз буква совпала с предыдущей, а 40 раз — не совпала. Определите, какое наибольшее число букв М могла написать Мила, и докажите, что оно действительно наибольшее.

Решение. Ответ: 80 букв.

Про каждую из букв, кроме первой, известно, совпадает она с предыдущей буквой или нет. Поэтому всего Мила написала $1 + 59 + 40 = 100$ букв.

Разделим все написанные буквы на группы из подряд идущих одинаковых букв. Тогда группы из букв М (М-группы) будут чередоваться с группами из букв Л (Л-группами). В начале каждой группы, кроме первой группы, стоит буква, которая не совпадает с предыдущей буквой. Все остальные буквы в группах совпадают с предыдущей буквой. Поэтому всего $1 + 40 = 41$ группа.

Если первая буква М, то будет 21 М-группа и 20 Л-групп. Если первая буква Л, то будет 20 М-групп и 21 Л-группа. Следовательно, минимальное число Л-групп — 20.

Минимальное число букв в одной группе — одна. Следовательно, Мила написала как минимум $20 \times 1 = 20$ букв Л. Поэтому букв М не может быть больше $100 - 20 = 80$.

Осталось показать, что Мила действительно могла написать 80 букв М. Это не сложно: сначала напишем 60 букв М, а затем 20 пар ЛМ.

□

4. Можно ли расставить целые числа от 2 до 17 в табличку 4×4 так, чтобы суммы во всех строках были равны и ни в какой строке не было двух чисел, делящихся одно на другое?

Решение. Нельзя. Предположим, что нам удалось расставить числа в таблице согласно условию. Тогда сумма всех чисел в таблице равна $2 + 3 + \ldots + 17 = 152$. Поэтому сумма чисел в одной строке равна $152 : 4 = 38$. Рассмотрим строку, в которой стоит число 2. В этой строке больше не может быть чётных чисел, так как любое чётное число делится на 2. Поэтому в этой строке стоит три нечётных числа и число 2. Но тогда сумма чисел в этой строке не может быть равна 38, так как она нечётна. Противоречие.

□

5. На столе лежат 20 шоколадных конфет. Маша и Медведь играют в игру по следующим правилам. Игроки ходят по очереди. За один ход можно взять одну или несколько конфет со стола и съесть их. Первой ходит Маша, но на этом ходу ей нельзя брать все конфеты. Во всех остальных ходах игрокам нельзя брать больше конфет, чем кто-либо уже брал за один ход. Выигрывает тот, кто возьмёт последнюю конфету. За это он получит целый торт! Кто из игроков может обеспечить себе победу?

Решение. Выиграет Маша, если первым ходом съест 4 конфеты.

Выстроим конфеты в ряд, пронумеруем их и будем считать, что игроки берут конфеты подряд слева направо.

Предположим, что Маша первым ходом съест одну конфету. В этом случае она проиграет, так как до конца игры игроки будут брать по одной конфете и все чётные конфеты, включая последнюю 20-ю конфету, достанутся Медведю.

Предположим, что Маша первым ходом съест две конфеты. Тогда Медведь будет брать по две конфеты до тех пор пока Маша не возьмёт одну конфету. Если Маша никогда не возьмёт одну конфету, то Медведь заберёт конфеты 3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 16, 19, 20 и победит. Если Маша возьмёт одну конфету, то её номер будет нечётный. Далее игроки будут, чередуясь, брать по одной конфете, причём Медведю достанутся конфеты с чётными номерами. И Маша опять проиграет.

Предположим, что Маша первым ходом съест три конфеты. Тогда Медведь своим первым ходом возьмёт одну конфету, а остальными ходами он опять съест все оставшиеся чётные конфеты, и Маша проиграет.

Предположим, что Маша первым ходом съест 4 конфеты. Затем Маша будет действовать так: если Медведь съест 4 конфеты, то Маша тоже съест 4, если Медведь съест 3 конфеты, то Маша съест одну, если Медведь съест 2 конфеты, то Маша съест тоже 2, если Медведь съест одну конфету, то Маша съест тоже одну. Если Медведь всегда будет брать по 4 конфеты, то Маша съест конфеты $1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 17, 18, 19, 20$ и победит. После того как Медведь съёст три или одну конфету, на столе останется нечётное число конфет и все оставшиеся конфеты с чётными номерами достанутся Маше. Маша опять победит. После того, как Медведь съест две конфеты, на столе будет лежать $20 - 4 - 2 = 14$ или $20 - 4 - 4 - 4 - 2 = 6$ конфет. Дальше игроки будут есть по две конфеты (случай с одной конфетой мы уже разобрали) и Маше достанутся 19-я и 20-я конфеты. Следовательно, в этой игре победит Маша, если первым ходом съест 4 конфеты.

□

6. Никита выписывает числа одно за другим по следующему правилу: сначала он пишет три каких-то натуральных числа. Затем повторяет одну и ту же процедуру: складывает три последних числа и дописывает в конец полученную сумму. Может ли Никита написать 9 простых чисел подряд, действуя таким образом?

Решение. Такое возможно, причем единственным образом:

$$5, 3, 3, 11, 17, 31, 59, 107, 197.$$

□

7. Петя задумал какое-то 9-значное число, полученное перестановкой цифр из числа 123 456 789. Витя пытается угадать его. Для этого он выбирает любое 9-значное число (возможно, с повторяющимися цифрами и нулем) и сообщает его Пете, а Петя отвечает, сколько совпадений у цифр этого числа с его задуманным. Может ли Витя не более чем за 4 хода узнать первую цифру в Петином числе? (Совпадение — это цифра, стоящая на том же месте.)

Решение. Первым ходом Витя называет число 122 222 222. Тогда Петя может ответить только 0, 1 или 2.

Если Петя отвечает 0, то ни единица ни двойка не попали на свои места. Значит, двойка должна стоять на первом месте. Дальше можно не спрашивать.

Если Петя ответит 2, то и единица и двойка попали на свои места. Значит, на первом месте стоит единица. Дальше можно не спрашивать.

Если Петя ответит 1, то ни единица, ни двойка не могут стоять на первом месте. В этом случае Витя назовёт следующее число 344 444 444. После ответа Пети Витя либо узнает первую цифру Петиного числа, либо поймёт, что это не тройка и не четвёрка. Далее Витя будет называть числа 566 666 666 и 788 888 888 пока не узнает первую цифру. Если же на число 788 888 888 Петя тоже ответит 1, то первой цифрой его числа будет единственная оставшаяся еще не проверенная цифра — 9.

□