5 класс

1. Капитан пиратов Билли награбил 1010 золотых дублонов и поплыл на своём корабле на необитаемый остров, чтобы закопать их в клад. Вечером каждого дня плавания он платил каждому своему пирату по одному дублону. На восьмой день плавания пираты ограбили испанскую каравеллу, и сокровище Билли увеличилось в два раза, а число пиратов вдвое уменьшилось. На 48-й день плавания пираты приплыли на необитаемый остров, и Билли закопал в отмеченном крестиком месте всё своё сокровище — ровно 1000 дублонов. Сколько пиратов отправилось с Билли на необитаемый остров?

Решение. Ответ: 30

До того как пираты ограбили каравеллу, Билли успел выплатить пиратам дневное жалование 7 раз. После этого его состояние удвоилось. Это равносильно тому, что перед плаванием у Билли было 2020 дублонов, а жалование он выплачивал 14 раз. После этого Билли 40 раз выплачивал жалование половине оставшихся пиратов. Это равносильно тому, что он 20 раз выплачивал жалование всем пиратам. Итого, Билли за всё плавание выплачивал полное жалование 34 раза. Значит изначально было $(2020 - 1000) : 34 = 30$ пиратов.

Если коротко, то $1000 = (1010 - 7n) \cdot 2 - 40 \cdot \frac{n}{2}$. □

2. Можно ли выписать в ряд 10 целых чисел так, чтобы произведение любых трёх идущих подряд из них делилось на 6, а произведение любых двух идущих подряд не делилось на 6?

Решение. Нельзя.

Во первых, ни одно из выписанных чисел не может делиться на 6, так как произведение этого числа и любого его соседа будет делиться на 6. Пусть первое число не делится ни на 2, ни на 3. Тогда произведение первых трёх чисел не будет делиться на 6, так как произведение второго и третьего числа не делится на 6. Противоречие.

Пусть первое число делится на 2. Тогда второе число не может делиться на 3, а третье число должно делиться на 3. Чтобы произведение второго, третьего и четвёртого чисел делилось на 6, необходимо, чтобы второе или четвёртое число делилось на 2. Но в этом случае произведение второго и третьего или произведение третьего и четвёртого будет делиться на 6.

Вариант, когда первое число делится на 3, рассматривается аналогично. □

3. Крош, Ёжик, Нюша и Бараш съели кулёк леденцов. Потом Совунья спросила: «Ну, и кто сколько леденцов съел?» На что ребята ответили так:

Крош: «Мы с Ёжиком и Нюшей вместе съели всего-то 120 леденцов.»

Ёжик: «Нюша и Бараш съели 103 леденца (я давно за ними наблюдаю).»

Нюша: «Мальчишки съели аж 152 леденца!»

А Бараш ничего не сказал (у него губы склеились).

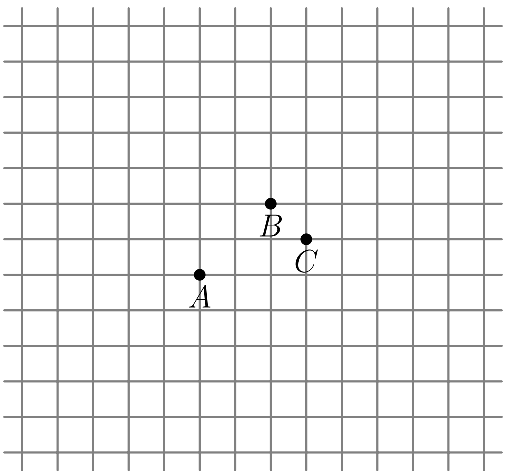
«Быть того не может!» — воскликнула Совунья. Почему?

Решение. Во всех трёх утверждениях каждый из ребят упоминается ровно два раза. Следовательно, сумма $120 + 103 + 152$ должна быть чётной. □

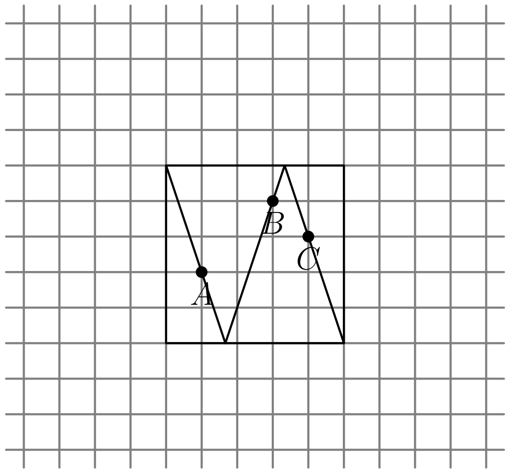
4. Длина эскалатора — 200 ступеней. Когда Петя спускается вниз по эскалатору пешком, он успевает насчитать 50 ступеней. Сколько ступеней он насчитает, если будет бежать в два раза быстрее?

Решение. 80 ступеней. Назовём ступеньку эскалатора, с которой Петя начинает спуск, первой ступенькой. Когда Петя спускается пешком, то он проходит 50 ступеней. За это время первая ступенька успевает опуститься на $200 - 50 = 150$ ступеней вниз. Следовательно, эскалатор движется в три раза быстрее, чем Петя идёт. Когда Петя побежит, то отношение скоростей будет $3 : 2$ в пользу эскалатора. Значит, Петя насчитает $200 \cdot 2 : (3 + 2) = 80$ ступеней. □

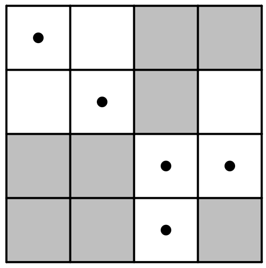
5. Вылетев из верхнего левого угла квадратного бильярда, шар прошел через точку A, отразился от нижней стенки, прошел через точку B, отразился от верхней стенки, прошел через точку C и влетел в нижний правый угол. Нарисуйте траекторию шара и бильярдный стол, предполагая, что бильярдный шар — это точка.



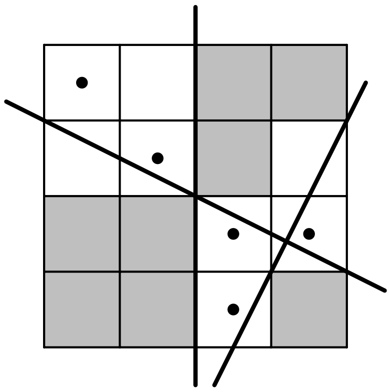
Решение. От лунки до лунки шар пролетит три вертикальных стороны бильярда и одну горизонтальную. Так как бильярд квадратный, то шар вылетает по направлению $(1, -3)$: смещаясь по горизонтали на одну клетку вправо, он смещается по вертикали на три клетки вниз. Следовательно, его траектория имеет вид:



6. Огород имеет форму квадрата, разделённого на 16 квадратных участков (см. рисунок). Закрашенные участки полностью засажены капустой, а точками помечены участки, в центре которых находятся козлы. Проведите три прямолинейных забора так, чтобы отгородить козлов от капусты. Заборы нельзя проводить ни по козлам, ни сквозь капусту.



Решение.



□

7. В компании есть эльфы, феи и гномы. Каждый эльф дружит со всеми феями, кроме каких-то трёх, а каждая фея — с в два раза большим числом эльфов. Каждый эльф дружит ровно с тремя гномам, а каждая фея — со всеми гномами. Каждый гном дружит ровно с половиной эльфов и фей в совокупности. Сколько в компании гномов?

Решение. Ответ: 12.

Пусть n — число эльфов, m — число фей, k — число гномов. Тогда дружных пар «эльф-фея» равно $n(m-3)$, а «фея-эльф» — $m \cdot 2(m-3)$. Но это одни и те же пары, следовательно,

$$n(m-3) = 2m(m-3).$$

Откуда, $n = 2m$. Считая дружные пары с гномами, приходим к уравнению

$$k \cdot \frac{n+m}{2} = 3n + mk.$$

Подставляя $n = 2\,m$, получаем

$$k \cdot \frac{3}{2}\,m = 6m + mk.$$

Сокращая на m, получаем $k = 12$. □