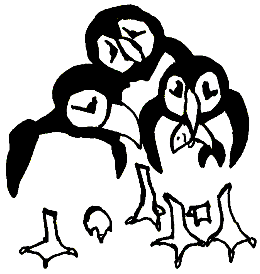
10 класс

Сюжет 1.

В архипелаге есть n скалистых островов, на них обитают n колоний ту́пиков (каждая колония целиком гнездится на одном острове). Некоторые пары островов соединены воздушными коридорами, причём от каждого острова до любого другого есть ровно один путь по этим коридорам. Острова, соединённые коридором, считаются соседними. Иногда происходят *миграции*: с некоторого острова на каждый соседний переселяется по колонии тупиков.



1.1. Докажите, что в любой момент может произойти миграция.

Решение.

Представим архипелаг в виде графа. Тогда наша система — дерево с неотрицательным числом в каждой вершине (равным числу колоний на соответствующем острове); сумма всех чисел равна n. Если мигрировать нельзя, каждое число меньше соответствующей степени хотя бы на единичку. Суммируя неравенства по всем вершинам, получаем:

$$n \leqslant 2(n-1) - n = n - 2.$$

Противоречие. □

1.2. Докажите, что как бы колонии тупиков ни располагались изначально, миграциями можно расселить колонии по одной на остров.

Решение. Индукция по числу вершин.

<u>База</u> тривиальна.

<u>Переход.</u> Докажем, что в любой вершине можно получить не 0. Подвесим дерево за эту вершину. Рассмотрим такой полуинвариант: сумма по всем вершинам величин $x_i n^{-d_i}$, где x_i — число в вершине, d_i — её глубина в подвешенном дереве. Легко видеть, что каждая миграция не из корня дерева отдаёт единичку наверх и менее n на уровень вниз, то есть сумма строго увеличивается. Но всех возможных сумм конечное число, так что рано или поздно будет возможна миграция только из корня, а это значит, что там не 0.

Теперь, собственно, переход. Рассмотрим лист v, при необходимости делаем там не 0 (мы только что доказали, что это возможно). Теперь отдаём из v всё, кроме 1, его соседу u. Рассмотрим последовательность миграций, делающую единички в дереве без v (она берётся из индукционного предположения). Применим её, только перед каждой миграцией из u будем отдавать туда 1 из v.
□

1.3. Докажите, что число колоний на данном острове никогда не превысит количество соседних с ним островов более, чем на 1.

Решение. Покажем, что любое доступное распределение чисел на дереве можно получить, организуя миграции так, чтобы каждая колония уходила не дальше, чем на соседний остров. Из этого сразу следует требуемое утверждение.

Доказываем индукцией по числу миграций. <u>База</u>: ноль миграций, очевидна.

<u>Переход.</u> Пусть вот-вот произойдёт миграция с острова v. По предположению индукции, все находящиеся на нем колонии — с него и соседних островов. Раз можно мигрировать, то на острове есть колонии хотя бы с $\deg v - 1$ соседних островов; отправим их обратно на свои острова. Если есть колония с оставшегося соседнего острова, тоже отправим её обратно, если есть своя колония, отправим её на любой из соседних островов.

□

1.4. Произошло некоторое число миграций. После этого на каждый остров высадилось по орнитологу. Каждый орнитолог может перелететь на другой остров на личном вертолёте по тем же воздушным коридорам. Однако в целях безопасности в течение суток запрещено взлетать с соседних островов и пролетать дважды по одному и тому же коридору или над одним и тем же островом. Докажите, тем не менее, что некоторые орнитологи могут за сутки переместиться на другие острова, чтобы на каждом острове орнитологов и колоний тупиков оказалось поровну.

Решение. По соображению из прошлого решения можно считать, что каждая колония ушла не далее, чем на соседний остров. То, на какой остров будет отправляться каждая колония при миграции, будем выбирать, как в индукционном предположении предыдущего пункта. Нарисуем на ребре дерева стрелку, если колония переместилась между соответствующими островами, направление стрелки соответствует направлению перемещения колонии.

Заметим три факта:

- Из каждой вершины выходит не более одной стрелки.
- На каждом ребре расположено не более одной стрелки. Действительно, пусть есть есть две стрелки между вершинами u и v, они в разных направлениях. Пусть стрелка из u в v появилась второй. Но когда она появлялась в u была колония из v, которая отправилась бы обратно, т. е. по нашему построению, не было бы ни одной из стрелок.
- Среди вершин, из которых есть стрелки, но в которые стрелок нет, нет двух соседних. Это так, потому что иначе бы в дереве было два нуля рядом, а так не бывает: последняя миграция из соответствующих двух вершин ломает второй ноль.

Всё, теперь из каждой вершины, в которую нет стрелочек, вертолёт летит по стрелочкам до упора, видно, что условия задачи выполняются. □

Сюжет 2.

Две окружности, вписанные в угол с вершиной R, пересекаются в точках A и B. Через A проведена прямая, пересекающая меньшую окружность в точке C, а большую — в точке D. Оказалось, что $AB = AC = AD$.

2.1. Пусть C и D совпали с точками касания окружностей и угла. Докажите, что угол R прямой.

Решение. Треугольник BCD прямоугольный (медиана — половина гипотенузы). Значит, сумма дуг AC и AD соответствующих окружностей равна $2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$, а сумма соответствующих углов между хордой и касательной $\angle CDR + \angle DCR = 90^\circ$, поэтому $\angle R = 90^\circ$. □

2.2. Пусть C и D совпали с точками касания окружностей и угла. Чему может быть равен угол ADR?

Решение. 15°. Треугольник RAB равносторонний: $RA = CD/2 = AB$ и $RA = RB$ по симметрии. Отсюда симметричные отрезки RA, RB образуют со сторонами углы, равные $\frac{90^\circ - 60^\circ}{2} = 15^\circ$ и этому же равен $\angle ADR$ (т.к. $AD = AR$). □

2.3. Докажите, что если $\angle R$ прямой, то C и D совпадают с точками касания окружностей и угла.

Решение. Выполним инверсию i относительно центра окружности с центром в A и радиусом AB. Имеем $i(B) = B$, $i(C) = C$, $i(D) = D$ и наши две окружности превращаются в прямые BC, BD, образующие прямой угол, а стороны исходного угла — в пару окружностей, вписанных в этот угол, перпендикулярных друг другу (как и соответствующие прямые до инверсии) и пересекающихся в точках $A, i(R)$. Вычислим отношение их радиусов — это легко делается применением теоремы Пифагора к треугольнику AO_1O_2 со сторонами $r_1, r_2, \sqrt{2}(r_2 - r_1)$ (O_1, O_2 — центры новых окружностей, $r_1 < r_2$ — радиусы). Получается $\frac{r_2}{r_1} = 2 + \sqrt{3}$, будем считать $r_1 = 1, r_2 = 2 + \sqrt{3}$.

Введём связанную с нашим прямым углом систему координат, тогда центры имеют координаты $(1,1)$ и $(2+\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$ а точки касания —

$$X_1 = (1,0), \quad X_2 = (0,1), \quad Y_1 = (0, 2+\sqrt{3}), \quad Y_2 = (2+\sqrt{3}, 0).$$

Середина X_1Y_1 — это $(\frac{1}{2}, 1+\frac{\sqrt{3}}{2})$ и считая расстояние от неё до O_1, O_2 убеждаемся, что это точка пересечения наших окружностей, как и середина X_2Y_2. Значит, эти середины — точки $A, i(R)$. Поскольку A не лежит на биссектрисе угла, то прямая, из которой наш угол высекает отрезок с серединой A — единственна, так что соответствующая пара точек $X_,Y_i$ совпадает с парой C, D.

Есть решение и без инверсий.

Из условия легко следует, что радиусы окружностей перпендикулярны: отрезки AC и AD симметричны AB относительно соответствующих радиусов, а C, A, D лежат на одной прямой.

Кроме того, из этой симметричности ясно, что такие точки C и D единственны. Значит, если мы покажем, что точки касания подходят на их роль, мы победим.

Пусть радиус маленькой окружности равен 1, большой — R. Тогда из теоремы Пифагора для $\triangle O_1O_2A$

$$\left(\sqrt{2}(R-1)\right)^2 = 1^2 + R^2,$$

у этого уравнения ровно одно решение, где $R > 1$:

$$R = 2 + \sqrt{3}.$$

Пусть C', D' — точки касания первой и второй окружностей разных сторон угла. Введём систему координат параллельно сторонам угла, тогда

$$C' = (0,1), \quad D' = (2+\sqrt{3}, 0).$$

Пусть A' — середина этого отрезка, тогда не очень трудно проверить, что она лежит на обеих окружностях:

$$\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1,$$

$$\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 - \sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 2 - \sqrt{3}\right)^2 = 1 + \frac{3}{4} + \sqrt{3} + \frac{9}{4} + 3 + 3\sqrt{3} = 7 + 3\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^2$$

То есть можно считать $A' = A$. Осталось убедиться, что $AB = \frac{1}{2}C'D' = AC' = AD'$.

$$\frac{1}{2}C'D' = \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{3})^2 + 1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{8 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})$$

(последнее равенство можно проверить, возведя в квадрат). По симметрии точка B имеет координаты $(\frac{1}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2})$, значит,

$$AB = \sqrt{2 \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{2}\,(1+\sqrt{3}).$$

Ура!

$\square$

2.4. Пусть $\angle R = 135°$. Перпендикуляр из A на ближайшую сторону угла пересекает меньшую окружность в точке P, перпендикуляр из A на вторую сторону пересекает BP в точке Q. Наконец, пусть O_1 и O_2 — центры исходных окружностей, O — центр окружности, описанной около $\triangle ABQ$. Докажите, что BO — биссектриса угла O_1BO_2.

Решение. Исполним ту же самую инверсию, что и в предыдущем пункте, вновь получим прямой угол и вписанную в него пару окружностей, пересекающихся под углом 135°. Перпендикуляр AP перейдёт в диаметр ,большей из окружностей, а сама точка $i(P)$ его пересечение со стороной угла. Перпендикуляр на вторую сторону перейдет в диаметр меньшей из окружностей.

Теперь четырехугольник $Ai(P)BU$ — вписанный, где U — центр меньшей из (новых) вписанных окружностей : $\angle i(P)BU = 45°$ (половина прямого угла, в который вписаны окружности), а $\angle i(P)AU = 135°$, так как это угол между окружностями равный углу,между исходными прямыми. С другой стороны, по построению пересечение окружности $Ai(P)B$ с прямой AU это как раз $i(Q)$. Значит $i(Q)$ лежит на биссектрисе угла, то есть (сделаем инверсию), окружность BQA образует равные углы с двумя исходными окружностями, а это именно то, что просят установить в задаче (радиус третьей окружности в точку пересечения — биссектриса первых двух радиусов). □

Сюжет 3.

Миша взял простое число $p > 2$ и вот-вот выпишет на доску в ряд числа

$$a^1 + b^1,\ a^2 + b^2,\ \ldots,\ a^{p-1} + b^{p-1}.$$

Затем он хочет отыскать среди них пару чисел, дающих одинаковые остатки от деления на p.

3.1. Пусть $p = 7$. Приведите пример таких $a, b \not\vdots\, 7$, при которых искомой пары не будет.

Решение. Все возможные пары по модулю 7 — это $(1,3)$, $(3,3)$, $(1,5)$ и $(5,5)$. □

3.2. Пусть $a = 4$, $b = 3$. Докажите, что будет искомая пара, содержащая одно из крайних чисел.

Решение. Если $p = 3$, то всё ясно.

Если $3^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p$, то по Малой Теореме Ферма

$$3^{\frac{p-1}{2}} + 4^{\frac{p-1}{2}} = 3^{\frac{p-1}{2}} + 2^{p-1} \equiv 1 + 1 \equiv 3^{p-1} + 4^{p-1}.$$

Иначе же $3^{(p-1)/2} \equiv -1$. Например, потому что из МТФ $3^{p-1} \equiv 1$, значит,

$$\left(3^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(3^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) \vdots\, p.$$

Тогда

$$4^{\frac{p-1}{2}+2} + 3^{\frac{p-1}{2}+2} \equiv 16 - 9 \equiv 7 = 4^1 + 3^1.$$

□

3.3. Докажите, что искомая пара найдётся, если $a = 4$, $b = 7$.

Решение. Случаи $p \leqslant 7$ разбираются руками.

- $7^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p$, этот случай делается точно так же, как в **3.2**;
- $7^{(p-1)/2} \equiv -1 \pmod p$.

Тогда $4^{\frac{p-1}{2}} + 7^{\frac{p-1}{2}} \equiv 0 \pmod p$, значит, если все $p-1$ остатков различны, их сумма **не** равна 0. Но с другой стороны, суммируя две геометрические прогрессии, получаем

$$\frac{4^p - 4}{4-1} + \frac{7^p - 7}{7-1}.$$

Это выражение равно 0 по МТФ. □

3.4. Докажите, что искомая пара найдётся, если $\frac{p-1}{2}$ — простое, $a = 2$ и $b = 3$.

Решение.

Лемма 1. *Пусть $q > 2$ простое и $k < q$ таково, что для любого $x = 1, 2, \ldots, q-1$ число x и остаток kx от деления на q имеют разную чётность. Тогда $k = q - 1$.*

Доказательство леммы 1. Подставляя $x = 1$ получаем, что k чётно, а значит kx всегда чётно, тогда остаток kx имеет ту же четность, что и неполное частное $[\frac{kx}{q}]$. Теперь подставляем $x = 2$, тогда $[\frac{2k}{q}] < 2$ и нечетно, т.е. $[\frac{2k}{q}] = 1$. Теперь подставляем $x = 3$, тогда $1 \leqslant [\frac{3k}{q}] < 3$ и $[\frac{3k}{q}]$ четно, т.е. $[\frac{3k}{q}] = 2$. Продолжая это, доходим до равенства $[\frac{(q-1)x}{q}] = q - 2$, что невозможно при $k \leqslant q - 2$, значит $k = q - 1$. $\square$

Следствие 1. *Пусть q простое, k нечётное, $k + 1$ не кратно $2q$. Тогда найдется l такое, что у обоих чисел l, kl остатки по модулю $2q$ строго между 0 и q.*

Доказательство. Действительно, попробуем в качестве l все числа от 1 до $q - 1$. Пусть все пары l, kl не подошли, т.е. все kl имеют остатки по модулю $2q$, большие q. Это значит, что чётность остатка kl по модулю q противоположна четности остатка kl по модулю $2q$ (q — нечётно), а она совпадает с четностью l (т.к. k нечётно) и мы попадаем в условия леммы. $\square$

Перейдём к решению задачи. Предположим, что все остатки различны. Посмотрим, на порядки 2 и 3 по модулю p. По МТФ они могут быть равны лишь $1, 2, q, 2q = p - 1$ (порядок a по модулю p — минимальное натуральное k такое, что $a^k - 1$ (или числитель соответствующей несократимой дроби,если a — дробь) кратно p, это k мы будем обозначать $\mathrm{ord}_p(a)$). Первые два случая проигнорируем, а случаи, когда хотя бы один из порядков равен q идентичны разобранным в пунктах 1 и 3. Пусть порядки $2q$, в частности все остатки $2, 2^2, \ldots, 2^{p-1}$ различны (иначе, если 2^a и 2^b дают одинаковые остатки, то $2^a - 2^b$, а значит и $2^{a-b} - 1$ кратно p, но $a - b < p - 1$) и найдётся такое m, что $2^m = 3$. Отметим также, что в этом случае $2^q = 3^q = -1$, так что если при некотором k имеем $2^k + 3^k = 0$, то и $2^{k \pm q} + 3^{\pm q} = -(2^k + 3^k) = 0$, так что нарушается условие различности остатков. Поэтому в нашей последовательности встречаются по разу все *ненулевые* остатки.

Подберём по следствию 1 такое $0 < l < q$, что $-ml$ при делении на $2q$ имеет остаток меньше q, назовём этот остаток r, $r + ml$ делится на $2q$.

Теперь изучим сумму $\sum_{k=1}^{p-1}(2^k + 3^k)^{r+l}$ по модулю p. С одной стороны, выражение в скобках пробегает все ненулевые остатки, а число $r + l < q + q$ не кратно $p - 1 = 2q = \mathrm{ord}_p(2)$, так что эту сумму можно посчитать, как сумму геометрической прогрессии с непостоянным знаменателем 2^{r+l} и она равна нулю.

Посчитаем эту же сумму другим способом. Раскрыв все скобки по биному, перегруппировав слагаемые и переставив множители в показателях степеней, мы получим сумму геометрических прогрессий вида $C_{r+l}^i \sum (2^i 3^{r+l-i})^k$. Докажем, что ровно одна из этих прогрессий постоянна, а значит, ровно одно из указанных выражений ненулевое (тут надо отметить, что $r, l < q$, так что $r + l < 2q = p - 1$, поэтому появляющиеся биномиальные коэффициенты не кратны p). Это даст требуемое противоречие.

Действительно, при $i = r$ получаем, учитывая $2^m = 3$, что $2^r 3^{r+l-r} = 2^{r+ml} = 1$, т.к. $r + ml$ делится на $2q$. С другой стороны, если $2^{r+s} 3^{r+l-r-s} = 1$, при некотором $s \in [-r,\ l]$ то, деля, получаем $2^s 3^{-s} = 1$ то есть $(2/3)^s = 1$. Получаем, что $\mathrm{ord}_p(2/3) \leqslant \max(r, l) < q$, значит $\mathrm{ord}_p(2/3)$ равен 1 или 2, что может быть лишь при $p = 5$; этот случай проверяется непосредственно. $\square$