Математический квадрат, 9–11 классы. 1вариант

Комбинаторика

1. Сколько натуральных чисел, не превосходящих 700 можно записать в виде суммы различных факториалов натуральных чисел?

2. Тридевятое царство расположено на шести островах, соединенных мостами. Его карта выглядит как два квадрата с общей стороной, где вершины квадратов — острова, а стороны — мосты. Сколькими способами можно разрушить некоторые мосты так, чтобы по оставшимся можно было добраться от любого острова до любого?

3. Сколько существует восьмизначных чисел, произведение цифр которых делится на 14?

4. Хулиганка Полина хочет покрасить каждое натуральное число в синий или желтый цвет следующим образом: число n должно быть покрашено в тот же цвет, что и число $n + 18$, и нет двух чисел, покрашенный в синий, что между ними стоит ровно 2 числа. Сколькими способами Полина может реализовать свой хитрый план?

Геометрия

1. ABC — равносторонний треугольник. Точка D такова, что углы $\angle ABD$ и $\angle ACD$ по 15 градусов. Найдите сумму всех возможных вариантов значения угла $\angle BDC$, выраженных в градусах.

2. H — точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC. HX — перпендикуляр из этой точки на AB. $AX = 3, XB = 7, HX = 4$. Найдите площадь треугольника ABC.

3. Даны две окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно. Радиус первой окружности равен 4, в второй — 6, расстояние между центрами равно 20. К ним проведены две общие внутренние касательные l_1 и l_2, пересекающиеся в точке T. P — точка пересечения ω_1 и l_1. Прямая b — биссектриса угла $\angle O_1TP$. Обозначим дальнюю от T точку пересечения ω_1 и b через R, ближнюю к T точку пересечения ω_2 и b — через S. Найдите, чему равняется $TR \cdot TS$

4. Внутри равностороннего треугольника ABC отмечена точка O такая, что $OA = 3, OB = 4, OC = 5$. Найдите длину стороны ABC с точностью до третьего знака после запятой.

Теория чисел

1. Найдите наименьшее натуральное число такое, что $(n!)^2$ делится на $100!$.

2. a, b — натуральные числа. Найдите наибольшее возможное значение $\text{НОД}(a-8, b^3+1, a^2+b)$.

3. Простое число p называют *числишком*, если существует такое натуральное число n, что $5p = [\frac{n^2}{5}]$. Найдите сумму всех числишек.

4. Дано 900-значное число $N = 148148\ldots148$. Найдите какое-нибудь натуральное число x, имеющее двузначное количество цифр, такое, что N делится на $x^2 - x + 1$.

Алгебра

1. Решите уравнение $4^{(3^2)} : (4^3)^2 = 4^{(3^x)}$.

2. Сколько решений имеет уравнение $\{x^2\} = \{\sqrt[3]{x}\}$ на промежутке $[1, 1000]$? Как обычно, $\{a\}$ обозначает дробную часть числа a.

3. Найдите наименьшее значение параметра a, при котором функция

$$y = \Big|\dots\Big|\big||x^2 - 2x + a| - 1\big| - 1\Big|\dots\Big| - 1 \qquad (2018 \text{ пар } |\dots|)$$

имеет нечётное число корней.

4. Пусть $A = \{1, \frac{3}{5}, \frac{9}{25}, \dots, \frac{3^{1000}}{5^{1000}}\}$. Найдите сумму попарных произведений элементов этого множества. Ответ округлите до десятых и запишите в виде десятичной дроби.

Математический квадрат, 9–11 классы. 2вариант

Комбинаторика

1. Сколько натуральных чисел, не превосходящих 600 можно записать в виде суммы различных факториалов натуральных чисел?

2. Тридевятое царство расположено на девяти островах, соединенных мостами. Его карта выглядит как два пятиугольника с общей стороной, где вершины пятиугольников — острова, а стороны — мосты. Сколькими способами можно разрушить некоторые мосты (хотя бы один) так, чтобы по оставшимся можно было добраться от любого острова до любого?

3. Сколько существует восьмизначных чисел, произведение цифр которых делится на 15?

4. Хулиганка Полина хочет покрасить каждое натуральное число в синий или желтый цвет следующим образом: число n должно быть покрашено в тот же цвет, что и число $n + 20$, и нет двух чисел, покрашенный в синий, что между ними стоит ровно 3 числа. Сколькими способами Полина может реализовать свой хитрый план?

Геометрия

1. ABC — равнобедренный треугольник с прямым углом A. Точка D такова, что углы $\angle ABD$ и $\angle ACD$ по 30 градусов. Найдите сумму всех возможных вариантов значения угла $\angle BDC$, выраженных в градусах.

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AX и CZ. $AZ = 9$, $BX = 5$, $BZ = 4$. Найдите площадь треугольника ABC с точностью до 3 знака после запятой.

3. Даны две окружности ω_1и ω_2 с центрами O_1 и O_2, соответственно. Радиус первой окружности равен 4, второй 3, расстояние между центрами равно 2. К ним проведены две общие касательные l_1 и l_2, пересекающиеся в точке T. P — точка пересечения ω_1 и l_1. Прямая b — делит угол O_1TP пополам. Обозначим дальнюю от T точку пересечения ω_1 и b за R, ближнюю к T точку пересечения ω_2 и b за S. Найдите, чему равняется $TR \cdot TS$.

4. Внутри равностороннего треугольника ABC отмечена точка O такая, что $OA = \sqrt{2}, OB = \sqrt{3}, OC = \sqrt{5}$. Найдите длину стороны ABC с точностью до 3 знака после запятой.

Теория чисел

1. Найдите наименьшее натуральное число такое, что $(n!)^3$ делится на $70!$.

2. a, b — натуральные числа. Найдите наибольшее возможное значение $\text{НОД}(a^2 - 3,\ b^2 - a,\ b - 5)$.

3. Простое число p называется *чиселком*, если существует такое натуральное число n, что $8p = [\frac{n^2}{8}]$. Найдите сумму всех чиселок.

4. Дано 372-значное число $N = 185185\ldots185$. Найдите какое-нибудь натуральное число x, имеющее двузначное количество цифр, такое, что N делится на $x^2 + x + 1$.

Алгебра

1. Решите уравнение $3^{(5^2)} : (3^5)^2 = (3^5)^x$.

2. Сколько решений имеет уравнение $\{x^3\} = \{\sqrt{x}\}$ на промежутке $[0, 100]$? Как обычно, $\{a\}$ обозначает дробную часть числа a.

3. Найдите наименьшее значение параметра a, при котором функция

$$y = \Big|\ldots\Big|\big||-x^2+6x+a|-2\big|-2\Big|\ldots\Big|-2 \qquad (2018 \text{ пар } |\ldots|)$$

имеет нечётное число корней.

4. Пусть $A = \{1, \frac{8}{9}, \frac{64}{81}, \ldots, \frac{8^{1000}}{9^{1000}}\}$. Найдите сумму попарных произведений различных элементов этого множества. Ответ округлите до десятых и запишите в виде десятичной дроби.