8 класс

1. На клетчатую доску 2018×2018 легла клетчатая змея, имеющая раскраску «зелёная клетка — красная — зелёная — синяя — зелёная — красная — зелёная — синяя и т. д.». Обнаружились две красные клетки, соседние по диагонали. Докажите, что змея поворачивает в одной из зелёных клеток.

2. На основании AE трапеции $ABCE$ выбрана такая точка D, что $S_{ABCD} = S_{CDE}$. Известно, что $ABCD$ — параллелограмм, и его диагонали пересекаются в точке O. На отрезке DE выбрана точка T. Докажите, что если $OT \parallel BE$, то $OD \parallel CT$.

3. В многограннике все грани треугольные или четырёхугольные. Каждую из граней покрасили в чёрный или белый цвет так, что любые две соседние грани оказались окрашены в разные цвета. Оказалось, что белых и чёрных треугольных граней поровну. Докажите, что белых и чёрных четырёхугольных граней тоже поровну.

4. Знакомый вам по первому туру Вася придумал n последовательных натуральных чисел, для каждого выписал сумму цифр, и в результате тоже получил n последовательных чисел (возможно, не по порядку). При каком максимальном n это возможно?

5. Дима придумал два взаимно простых числа a и b, а потом нашёл остатки от деления на a у чисел b, b^2, b^3, $\ldots$, b^{999}. Может ли первое из получившихся у него чисел оказаться больше суммы остальных?

6. В прямоугольном треугольнике ABC точка M — середина гипотенузы AB. На луче CM отмечены точки X и Y. Известно, что прямые XA и YA образуют одинаковые углы с прямой AC. Докажите, что прямые XB и YB образуют одинаковые углы с прямой BC.

7. На столе лежат 102 конфетки, полезности которых равны $-101, -99, -97, \ldots, 99, 101$. Саша и Женя играют в игру, делая ходы по очереди (начинает Саша). За один ход нужно съесть две конфетки, суммарная полезность которых неотрицательна. Тот, который не может сделать ход, проигрывает. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?