9 класс

Сюжет 1

На доске написана неупорядоченная тройка целых чисел. Разрешается менять написанную на доске тройку (a, b, c) на неупорядоченную тройку $(f(a), f(b), f(c))$ (где $f(x)$ — квадратный трехчлен с целыми коэффициентами) произвольное количество раз (при этом можно брать различные f на разных шагах).

1. Можно ли из тройки $(2, 4, 6)$ получить $(2, 2, 10)$?

Решение:
Да, за один шаг с помощью $f(x) = (x-3)^2 + 1 = x^2 - 6x + 10$.

2. Можно ли из тройки $(2, 4, 7)$ получить $(2, 6, 9)$?

Решение:
Нет. Можно заметить, что если у нас до замены были числа a и b, разность которых делилась на какое-то натуральное k, то после замены $f(a) - f(b)$ (по очевидным соображениям) будет делиться на $a - b$, а значит и на k. Т.о. если в начальной тройке были числа 2 и 7, разность которых делится на 5, то и в дальнейшем должна быть пара чисел, разность которых делится на 5, а в тройке $(2, 6, 9)$ таких чисел нет.

3. Можно ли из тройки $(2, 5, 8)$ получить $(2, 5, 11)$?

Решение:
Нет.

Рассмотрим тройку попарных разностей наших чисел. Заметим, что две тройки с одинаковым набором попарных разностей очевидно переводятся друг в друга линейным преобразованием.

Тогда если мы научимся переводить начальную тройку в имеющую с целевой одинаковый набор попарных разностей, то применив вместо последнего преобразования его композицию с этим самым линейным, получим в точности целевую тройку. Также верно и обратное — если мы не умеем получать из начальных условий какой-то набор, то не умеем получать и имеющие с ним общий набор разностей.

Заметим также, что единожды появившись, разность 0 более никогда не исчезнет.

Докажем, что мы не сможем получить из набора разностей $\{3, 3, 6\}$ набор $\{3, 6, 9\}$. Рассмотрим первое преобразование, которое изменит набор разностей. По соображениям из пункта 2, разность 6 может переходить только в разность 6 — она всегда будет делиться на 6, а набор разностей в конечном результате ничего, кроме 6 предложить не может. Тогда 3 и 3 переходят в 3 и 9. Таким образом, мы либо получим набор разностей за одно преобразование — либо не получим его никогда.

Осталось доказать, что мы не сможем получить из упорядоченной тройки $(2, 5, 8)$ одну из двух упорядоченных же троек $(5, 2, 11)$ или $(11, 2, 5)$ за одно действие. Получаем для гипотетического $f(x) = ax^2 + bx + c$,

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 5 \\ 25a + 5b + c = 2 \\ 64a + 8b + c = 11 \end{cases}$$

Эта система (и аналогичная ей с числами 11, 2 и 5 в правой части) не имеет решений в целых числах. Ну, или можно составить интерполяционный многочлен и удостовериться, что у него не целые коэффициенты.

4. Докажите, что если *упорядоченную* тройку (x, y, z) можно получить из *упорядоченной* тройки (a, b, c) многократным применением указанных операций, то то же можно сделать и за одну операцию.

Решение:

Попытаемся получить (x, y, z) за одну операцию. Нужный результат даст многочлен

$$P(t) = x + \frac{y-x}{b-a}(t-a) + \frac{z - (x + \frac{y-x}{b-a}(z-a))}{(c-a)(c-b)}(t-a)(t-b)$$

(это интерполяция по Ньютону: первое слагаемое устанавливает значение x в точке a, второе, сохраняя его, устанавливает значение y в точке b, наконец третье устанавливает значение z в точке $t = c$, не меняя значений при $t = a$ и $t = b$). Если оба числа

$$\frac{y-x}{b-a}, \quad \frac{z - (x + \frac{y-x}{b-a}(c-a))}{(c-a)(c-b)}$$

— целые числа, то коэффициенты P целые, а значит (x, y, z) достижим из (a, b, c) за один ход.

Теперь покажем, что если (x, y, z) можно получить из тройки (a, b, c) за много операций, то эти числа и вправду целые — отсюда будет следовать нужное утверждение. Действительно, пусть мы получили (x, y, z), применяя трехчлены $P_1, P_2, \dots P_n$. Тогда результирующая функция $Q(x) = P_n(P_{n-1}(\dots(P_1(x))\dots))$ — это тоже многочлен, причём $Q(a) = x$, $Q(b) = y$, $Q(c) = z$. Тогда число $\frac{Q(b)-Q(a)}{b-a}$ — целое,как уже обсуждалось в предыдущих пунктах. Посмотрим на второе, выражение, приведя его к виду

$$\frac{\frac{z-x}{c-a} - \frac{y-x}{b-a}}{c-b} = \frac{\frac{Q(c)-Q(a)}{c-a} - \frac{Q(b)-Q(a)}{b-a}}{c-b}.$$

То, что это целое число, легко проверяется явным вычислением. Заметим, например (больше для краткости записи), что эту целость достаточно проверять для мономов, т.е для случая $Q(x) = x^k$ (при сложении одночленов интересующие нас дроби будут тоже складываться). Имеем

$$\frac{\frac{c^k-a^k}{c-a} - \frac{b^k-a^k}{b-a}}{c-b} =$$
$$= \frac{c^{k-1} + c^{k-2}a + \dots + a^{k-1} - (b^{k-1} + b^{k-2}a + \dots + a^{k-1})}{c-b} =$$
$$= \frac{c^{k-1} - b^{k-1}}{c-b} + \frac{a(c^{k-2} - b^{k-2})}{c-b} + \dots + \frac{a^{k-2}(c-b)}{c-b}$$

— целое число.

Сюжет 2

У Георгия Константиновича есть сад, по которому иногда пробегает Эрих. Эрих бегает по прямой, но каждый раз по новой. Георгий Константинович хочет закупить и расставить внутри или на границе сада противотанковые ежи (в виде нескольких отрезков) так, чтобы Эрих гарантированно в них уперся. Длиной ежа называется сумма длин составляющих его отрезков.

1. Пусть сад имеет форму правильного треугольника со стороной 1. Докажите, что Георгию Константиновичу хватит ежей суммарной длиной $\sqrt{3}$.

Решение:

Проведем медианы до точки пересечения. Длина каждой из медиан равна $\sqrt{3}/2$, а поскольку медианы делят друг друг в отношении $2:1$, то суммарная длина отрезков медиан до точек пересечения равна $\sqrt{3}$.

2. Пусть сад имеет форму квадрата со стороной 1. Докажите, что Георгию Константиновичу хватит ежей длиной 2,65.

Решение:

Хватит, например, отметить точку X, разбивающую диагональ AC в отношении $3:1$ и соединить ее с точками B, C и D (это ёж №1) и соединить точку A с точкой пересечения диагоналей квадрата (это ёж №2).

3. Пусть сад имеет форму правильного треугольника со стороной 1. Докажите, что Георгию Константиновичу придется купить ежей длиной хотя бы $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Решение:

Пусть M, N — середины сторон AB, AC нашего правильного треугольника ABC, K — середина MN. Тогда проекции частей ежей, попавших внутрь треугольника AMN на отрезок AK, должны целиком его покрывать — иначе Эрик шмыгнёт перпендикулярно AK через непокрытую точку. Поэтому сумма длин проекций, а тем более — самих этих частей ежей, не меньше, чем $|AK| = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Складывая с кусками ежей, попавшими в два аналогичных треугольника примыкающих к B и C, получаем, что сумма длин ежей не меньше,чем $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, что чуть больше, чем 1,29.

4. Пусть сад имеет форму квадрата со стороной 1. Докажите, что Георгию Константиновичу придется купить ежей длиной хотя бы 2.

Решение:

Ясно, что проекции ежей на каждую из диагоналей должны ее полностью покрывать, иначе по перпендикуляру через непокрытую точку может пробежать Эрих. Пусть длины наших отрезков равны a_i, а их углы с одной из диагоналей — ϕ_i. Получаем два неравенства:

$$\sum a_i \cos\phi_i \geqslant \sqrt{2}, \quad \sum a_i \sin\phi_i \geqslant \sqrt{2}.$$

Сложим, оценим сумму $\sin\phi + \cos\phi \leqslant \sqrt{2}$ (например, заметив, что это $\sqrt{2}\cdot\sin(45^\circ + \phi)$), получим то, что нужно.

Сюжет 3

В магической стране есть несколько школ. Некоторые из них соединены беспосадочными маршрутами совиной почты. Кратчайшим путем между школами называется путь, для которого сове понадобится наименьшее количество перелетов. Страна называется *гармоничной*, если для любых трех различных школ Ю, М и Ш существует единственная школа (называемая *медианой*), принадлежащая одновременно каким-то кратчайшем путям из Ю в М, из М в Ш и из Ю в Ш (она может совпадать с одной из школ Ю, М, Ш).

1. Докажите, что если в стране любые две школы соединяет ровно одна цепочка беспосадочных маршрутов, то эта страна гармонична.

Решение:

Обратим внимание на то, что в дереве любые две вершины соединяет ровно один путь, он и будет кратчайшим.

Возьмем три различные вершины x, y и z. Обозначим вершины на пути из y в x как $y = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = x$, а вершины на пути из y в z, как $y = z_0, z_1, z_2, \ldots, z_m = z$.

Выберем максимальное такое k, что $y_k = z_k$. Тогда $y_i \neq z_j$ при $i, j > k$ (при $i = j$ по максимальности, а при $i \neq j$ можно было бы найти цикл). Осталось заметить, что последовательность $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_k = z_k, z_{k+1}, z_m$ — путь из z в x. И наши три пути пересекаются ровно по одной вершине $x_k = z_k$.

2. Докажите, что если страна является гармоничной, то можно назвать некоторые школы *добрыми*, а остальные *злодейскими* так, чтобы любой беспосадочный маршрут соединял добрую школу со злодейской.

Решение:

Нас просят доказать, что граф двудолен, а это условие (как хорошо известно) эквивалентно четности всех циклов.

Предположим противное, и рассмотрим самый короткий нечетный цикл в графе. Возьмем в качестве x и y две смежные вершины этого цикла, а в качестве z — противоположную им вершину. Ясно, что той самой, единственной вершиной обязана быть либо x, либо y, но ни одна из них не подходит.

3. В стране Гиперляндии 2^n школ, названиями которых являются все возможные последовательности из символов 0 и 1 длины n, при этом между школами есть беспосадочный маршрут тогда и только тогда, когда их названия отличаются ровно в одном символе. Докажите, что Гиперляндия — гармоничная страна.

Решение:

Рассмотрим вершины x, y и z. Ясно, что на медианной вершине реализуется минимум суммы $d(x,m) + d(y,m) + d(z,m)$, поскольку она равна половине $d(x,y) + d(x,z) + d(y,z)$. Теперь заметим, что если мы возьмем в качестве m наиболее частое значение в каждом бите (такое будет, так как три не делится пополам), то это единственный кандидат на эту роль; ясно также, что он подходит.

4. Пусть в гармоничной стране n школ, каждая из которых соединена беспосадочными маршрутами ровно с d другими. Докажите, что $d < 2\sqrt{n}$.

Решение:

Заметим, что если мы подвесим за произвольную вершину v, количество ребер со второго на третий уровень будет $d(d-1)$, поскольку в графе не может быть треугольников. Теперь заметим, что если три таких ребра ведут из вершин u_1, u_2, u_3 в вершину w, то медианами вершин u_1, u_2 и u_3 будут одновременно v и w, поскольку между собой u_1, u_2 и u_3 не соединены. Получается, что

$$d(d-1) < 3(n-d-1),$$

что влечет $d < 2\sqrt{n}$.