

Математический квадрат, 9–11 классы. 1вариант

Комбинаторика

1. Сколько натуральных чисел, не превосходящих 700 можно записать в виде суммы различных факториалов натуральных чисел?

ОТВЕТ: 31.

2. Тридевятое царство расположено на шести островах, соединенных мостами. Его карта выглядит как два квадрата с общей стороной, где вершины квадратов — острова, а стороны — мосты. Сколькими способами можно разрушить некоторые мосты так, чтобы по оставшимся можно было добраться от любого острова до любого?

ОТВЕТ: 23 или 22 (в зависимости от того, считать ли вариант «НИЧЕГО НЕ ЛОМАТЬ»).

3. Сколько существует восьмизначных чисел, произведение цифр которых делится на 14?

ОТВЕТ: 72 897 695.

4. Хулиганка Полина хочет покрасить каждое натуральное число в синий или желтый цвет следующим образом: число n должно быть покрашено в тот же цвет, что и число $n + 18$, и нет двух чисел, покрашенный в синий, что между ними стоит ровно 2 числа. Сколькими способами Полина может реализовать свой хитрый план?

ОТВЕТ: 5832.

Геометрия

1. ABC — равносторонний треугольник. Точка D такова, что углы $\angle ABD$ и $\angle ACD$ по 15 градусов. Найдите сумму всех возможных вариантов значения угла $\angle BDC$, выраженных в градусах.

ОТВЕТ: 180.

2. H — точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC . HX — перпендикуляр из этой точки на AB . $AH = 3$, $HB = 7$, $HX = 4$. Найдите площадь треугольника ABC .

ОТВЕТ: 26,25.

3. Даны две окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно. Радиус первой окружности равен 4, в второй — 6, расстояние между центрами равно 20. К ним проведены две общие внутренние касательные l_1 и l_2 , пересекающиеся в точке T . P — точка пересечения ω_1 и l_1 . Прямая b — биссектриса угла $\angle O_1TP$. Обозначим дальнюю от T точку пересечения ω_1 и b через R , ближнюю к T точку пересечения ω_2 и b — через S . Найдите, чему равняется $TR \cdot TS$

ОТВЕТ: 72.

4. Внутри равностороннего треугольника ABC отмечена точка O такая, что $OA = 3$, $OB = 4$, $OC = 5$. Найдите длину стороны ABC с точностью до третьего знака после запятой.

ОТВЕТ: 6,766.

Теория чисел

1. Найдите наименьшее натуральное число такое, что $(n!)^2$ делится на $100!$.

ОТВЕТ: 97.

2. a, b — натуральные числа. Найдите наибольшее возможное значение $\text{НОД}(a - 8, b^3 + 1, a^2 + b)$.

ОТВЕТ: 262 143.

3. Простое число p называют *числишком*, если существует такое натуральное число n , что $5p = \lfloor \frac{n^2}{5} \rfloor$. Найдите сумму всех числишков.

ОТВЕТ: 52.

4. Дано 900-значное число $N = 148148 \dots 148$. Найдите какое-нибудь натуральное число x , имеющее двузначное количество цифр, такое, что N делится на $x^2 - x + 1$.

ОТВЕТ: НАПРИМЕР, $10^{20} + 1$.

Алгебра

1. Решите уравнение $4^{(3^2)} : (4^3)^2 = 4^{(3^x)}$.

ОТВЕТ: 1.

2. Сколько решений имеет уравнение $\{x^2\} = \{\sqrt[3]{x}\}$ на промежутке $[1, 1000]$? Как обычно, $\{a\}$ обозначает дробную часть числа a .

ОТВЕТ: 999 991.

3. Найдите наименьшее значение параметра a , при котором функция

$$y = \left| \dots \left| |x^2 - 2x + a| - 1 \right| - 1 \right| \dots \left| - 1 \right. \quad (2018 \text{ пар } | \dots |)$$

имеет нечётное число корней.

ОТВЕТ: -2017.

4. Пусть $A = \{1, \frac{3}{5}, \frac{9}{25}, \dots, \frac{3^{1000}}{5^{1000}}\}$. Найдите сумму попарных произведений элементов этого множества. Ответ округлите до десятых и запишите в виде десятичной дроби.

ОТВЕТ: 2,3.

Математический квадрат, 9–11 классы. 2вариант

Комбинаторика

1. Сколько натуральных чисел, не превосходящих 600 можно записать в виде суммы различных факториалов натуральных чисел?

ОТВЕТ: 31.

2. Тридевятое царство расположено на девяти островах, соединенных мостами. Его карта выглядит как два пятиугольника с общей стороной, где вершины пятиугольников — острова, а стороны — мосты. Сколькими способами можно разрушить некоторые мосты (хотя бы один) так, чтобы по оставшимся можно было добраться от любого острова до любого?

ОТВЕТ: 33.

3. Сколько существует восьмизначных чисел, произведение цифр которых делится на 15?

ОТВЕТ: 71 933 793.

4. Хулиганка Полина хочет покрасить каждое натуральное число в синий или желтый цвет следующим образом: число n должно быть покрашено в тот же цвет, что и число $n + 20$, и нет двух чисел, покрашенный в синий, что между ними стоит ровно 3 числа. Сколькими способами Полина может реализовать свой хитрый план?

ОТВЕТ: 14641.

Геометрия

1. ABC — равнобедренный треугольник с прямым углом A . Точка D такова, что углы $\angle ABD$ и $\angle ACD$ по 30 градусов. Найдите сумму всех возможных вариантов значения угла $\angle BDC$, выраженных в градусах.

ОТВЕТ: 270.

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH и CZ . $AZ = 9$, $BH = 5$, $BZ = 4$. Найдите площадь треугольника ABC с точностью до 3 знака после запятой.

ОТВЕТ: 62,4.

3. Даны две окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 , соответственно. Радиус первой окружности равен 4, второй 3, расстояние между центрами равно 2. К ним проведены две общие касательные l_1 и l_2 , пересекающиеся в точке T . P — точка пересечения ω_1 и l_1 . Прямая b — делит угол O_1TP пополам. Обозначим дальнюю от T точку пересечения ω_1 и b за R , ближнюю к T точку пересечения ω_2 и b за S . Найдите, чему равняется $TR \cdot TS$.

ОТВЕТ: 36.

4. Внутри равностороннего треугольника ABC отмечена точка O такая, что $OA = \sqrt{2}$, $OB = \sqrt{3}$, $OC = \sqrt{5}$. Найдите длину стороны ABC с точностью до 3 знака после запятой.

ОТВЕТ: 304.

Теория чисел

1. Найдите наименьшее натуральное число такое, что $(n!)^3$ делится на $70!$.

ОТВЕТ: 67.

2. a, b — натуральные числа. Найдите наибольшее возможное значение $\text{НОД}(a^2 - 3, b^2 - a, b - 5)$.

ОТВЕТ: 622.

3. Простое число p называется *чиселком*, если существует такое натуральное число n , что $8p = \lfloor \frac{n^2}{8} \rfloor$. Найдите сумму всех чиселок.

ОТВЕТ: 25.

4. Дано 372-значное число $N = 185185 \dots 185$. Найдите какое-нибудь натуральное число x , имеющее двузначное количество цифр, такое, что N делится на $x^2 + x + 1$.

ОТВЕТ: НАПРИМЕР, $10^{31} - 1$.

Алгебра

1. Решите уравнение $3^{(5^2)} : (3^5)^2 = (3^5)^x$.

ОТВЕТ: 3.

2. Сколько решений имеет уравнение $\{x^3\} = \{\sqrt{x}\}$ на промежутке $[0, 100]$? Как обычно, $\{a\}$ обозначает дробную часть числа a .

ОТВЕТ: 999 992.

3. Найдите наименьшее значение параметра a , при котором функция

$$y = \left| \dots \left| \left| -x^2 + 6x + a \right| - 2 \right| \dots \right| - 2 \quad (2018 \text{ пар } |\dots|)$$

имеет нечётное число корней.

ОТВЕТ: -4045.

4. Пусть $A = \{1, \frac{8}{9}, \frac{64}{81}, \dots, \frac{8^{1000}}{9^{1000}}\}$. Найдите сумму попарных произведений различных элементов этого множества. Ответ округлите до десятых и запишите в виде десятичной дроби.

ОТВЕТ: 38,1.