8 класс

1. Дан ряд из 13 чисел: 1_2_3_4_5_6_7_8_9_10_11_12_13. Поставьте вместо каждого пропуска знак сложения или умножения так, чтобы получилось 2018.

Решение:

$1+2+3+4+5\cdot 6\cdot 7+8\cdot 9+10+11\cdot 12\cdot 13=2018$. (Можно также $1\cdot 2\cdot 3$ вместо $1+2+3$.)

2. Вася выписал 20 последовательных натуральных чисел в некотором порядке. Докажите, что найдутся два числа, стоящих рядом, у которых совпадает хотя бы одна цифра.

Решение:

Среди 20 последовательных чисел найдутся 10 из одного десятка, причем не однозначные; у них совпадает цифра в разряде десятков — обозначим ее через N.

Кроме того, каждая цифра, в частности N, ровно два раза встречается среди последних цифр 20 подряд идущих чисел; из них — только один раз в обозначенном нами десятке.

Таким образом, у нас есть одиннадцать чисел с цифрой N. Тогда если разбить 20 выписанных Васей чисел на 10 пар рядом стоящих, найдется пара, в которой оба числа содержат N.

3. Можно ли разбить числа от 0 до 1000 на семёрки так, чтобы в каждой семёрке сумма каких-то двух чисел равнялась сумме пяти остальных?

Решение:

Поскольку $1001:7=143$, то должно получиться 143 семёрки, и в каждой из них сумма пяти чисел равна сумме двух остальных, то есть половине общей суммы. Значит, $143\cdot 5=715$ чисел в сумме должны составлять половину от всех чисел.

Заметим, однако, что сумма всех чисел равна

$$0+1+2+\ldots+1000=\frac{(0+1000)\cdot 1001}{2}=500\cdot 1001=500500,$$

а сумма 715 чисел не меньше, чем

$$0+1+2+\ldots+714=\frac{(0+714)\cdot 715}{2}=357\cdot 715=255255.$$

Значит, сумма 715 чисел всегда больше, чем сумма оставшихся 286 чисел, и требуемое разбиение невозможно.

4. Дорога между пунктами A и B состоит только из наклонных участков: иногда она идёт в гору (вверх), а иногда под гору (вниз). Никита идёт в гору со скоростью 3 км/ч, а под гору со скоростью 5 км/ч. Первую половину пути из A в B он прошёл за 32 минуты, а вторую половину — за 37 минут. Возвращаясь из B в A, он преодолел первую половину пути за 36 минут. Сколько времени ему потребуется на вторую половину?

Решение:

Рассмотрим ту половину пути, которая ближе к B. Никита прошёл её дважды: в одном направлении за 37 минут, в другом за 36, то есть суммарно потратил 73 минуты. Заметим, что каждый из наклонных участков за это время пройден один раз вверх и один раз вниз, поэтому общая длина пути вверх равна общей длине пути вниз. Значит, чтобы пройти полдороги вверх и полдороги вниз, нужно 73 минуты.

Но то же самое относится и к той половине пути, которая ближе к A. Значит, её преодоление в две стороны тоже занимает 73 минуты. Поскольку в одну сторону Никита прошёл её за 32 минуты, то на обратный путь нужна 41 минута.

Замечание. Можно также решить эту задачу, составив систему уравнений.

5. Даны три натуральных числа, одно из которых равно наибольшему общему делителю двух других. Антон заменил цифры в десятичной записи этих чисел буквами, причём одинаковые цифры заменил одинаковыми буквами, разные — разными. В результате числа приняли вид МИМИМИ, ФЫРФЫР и ЛИСА. Какое наименьшее значение может принимать число ЛИСА?

Решение:

Очевидно, что НОДом является наименьшее из трёх чисел, то есть

$$\text{НОД}(\text{МИМИМИ}, \text{ФЫРФЫР}) = \text{ЛИСА}.$$

Заметим, что МИМИМИ $= 10101 \cdot$ МИ $= 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot$ МИ, ФЫРФЫР $= 1001 \cdot$ ФЫР $= 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot$ ФЫР, поэтому их НОД делится на $7 \cdot 13 = 91$. Наименьшее четырёхзначное число, кратное 91, равно 1001, но в нём есть совпадающие цифры. Поэтому минимальное подходящее число ЛИСА $= 1092$.

Такой пример существует: например, МИ $= 80$, ФЫР $= 564$, тогда

$$\begin{aligned}\text{НОД}(808080, 564564) &= \text{НОД}(3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 5 \cdot 2^4,\ 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 47) = \\ &= 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 2^2 = 91 \cdot 12 = 1092.\end{aligned}$$

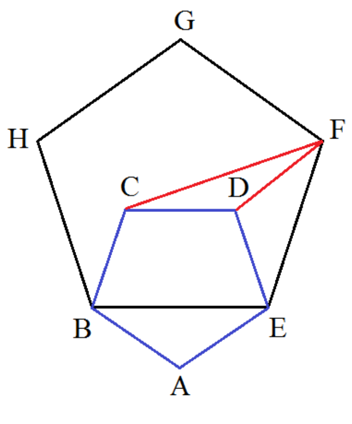
6. $ABCDE$ и $BEFGH$ — правильные пятиугольники на плоскости. (Правильный пятиугольник — это такой, у которого все стороны равны, а каждый угол равен $108°$.)

а) Найдите величину угла CFD.

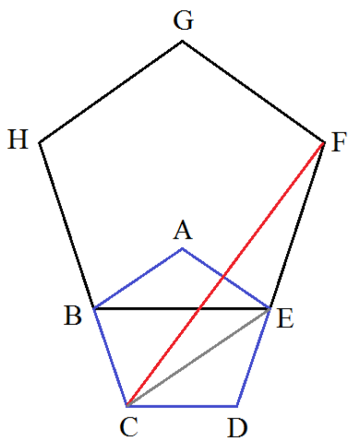
б) Докажите, что к восьми упомянутым в условии точкам можно добавить ещё восемь так, чтобы полученные 16 точек служили вершинами шести правильных пятиугольников.

Решение:

(а) Обозначим сторону пятиугольника $ABCDE$ через a, а сторону $BEFGH$ — через b. Возможны два случая взаимного расположения пятиугольников.



Случай 1



Случай 2

Случай 1. В треугольнике ABE стороны AB и AE равны a, $BE = b$, $\angle BAE = 108°$, поэтому $\angle ABE = \angle AEB = (180° - 108°)/2 = 36°$.

Треугольники DEF и AEB равны по первому признаку, т. к. $AE = DE = a$, $BE = FE = b$, $\angle DEF = 108° - \angle DEB = \angle AEB$. Значит, $DF = AB = a$, $\angle EDF = \angle EAB = 108°$.

Треугольник CDF равнобедренный ($CD = DF = a$), а угол против основания равен $\angle CDF = 360° - 108° - 108° = 144°$. Значит, $\angle CFD = (180° - 144°)/2 = 18°$.

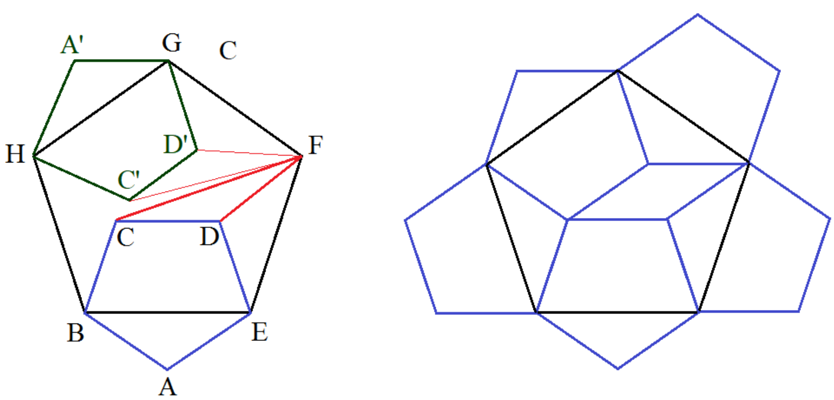
Случай 2. $\triangle ABE = \triangle CDE$, т. к. они оба равнобедренные ($AB = AE = DC = DE = a$) с углами при основании $\angle A = \angle D = 108°$. Поэтому $CE = BE = b$; $\angle BEA = (180° - 108°)/2 = 36°$.

$\angle FED = \angle FEA + \angle AED = \angle FEB - \angle BEA + \angle AED = 108° - 36° + 108° = 180°$, то есть точка E лежит на отрезке FD, и вместо угла CFD можно искать угол CFE.

Поскольку $CE = b$ (см. выше), $EF = b$, то $\triangle FEC$ равнобедренный. Угол против основания в нём равен $\angle FEC = 180° - \angle CED = 180° - 36° = 144°$, поэтому $\angle CFE = (180° - 144°)/2 = 18°$.

Таким образом, искомый угол CFD в обоих случаях равен $18°$.

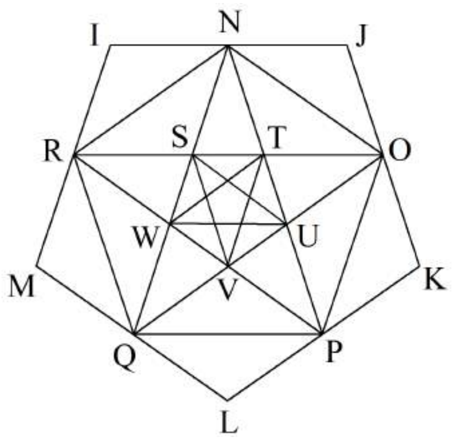
(б) Вернёмся к случаю 1. В этом случае $\angle CFE = \angle CFD + \angle DFE = 18° + 36° = 54° = \angle GFE/2$, то есть CF — биссектриса $\angle GFE$. Пусть $A'HC'D'G$ — правильный пятиугольник, вершины C' и D' которого лежат внутри $BEFGH$. Покажем, что точка C' совпадает с точкой C. Действительно, расчёты для треугольника $FD'C'$ (как в пункте а) приведут нас к тому, что две его стороны равны a, а углы — $18°, 18°, 144°$, то есть он равен $\triangle FDC$, и $FC' = FC$. Кроме того, тем же способом, что и в пункте а), получим $\angle GFC' = 54°$. Значит, FC' — тоже биссектриса угла GFE, поэтому она совпадает с лучом FC. Поскольку отрезки FC и FC' равны, то точка C' совпадает с C.



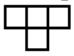
Далее, из этого следует, что $CH = CB$. Кроме этого, $\angle HBC = \angle HBE - \angle CBE = \angle HBE - (\angle CBA - \angle ABE) = 108° - (108° - 36°) = 36°$. Значит, $\triangle HBC$ — равнобедренный с углами $36°, 36°, 108°$, поэтому его можно достроить до правильного пятиугольника.
То же верно про треугольник DEF (доказано в пункте а) и аналогичный ему треугольник $D'GF$, поэтому каждый из них можно достроить до правильного пятиугольника. Как видно на рисунке 3, всего получается 16 вершин и 6 правильных пятиугольников.

Что если точки изначально располагались как в случае 2? Заметим, что такие 8 точек тоже легко найти среди 16 точек на рисунке 3, то есть они дополняются до такого же множества.

Замечание. Некоторые участники придумали конструкцию с лучшими свойствами, чем в решении жюри. Можно отметить 15 точек так, чтобы они служили вершинами 8 правильных многоугольников. Для этого надо взять правильный многоугольник $IJKLM$; отметить в нём середины сторон N, O, P, Q, R; соединить их отрезками, которые пересекаются в точках S, T, U, V, W. Получим 8 правильных многоугольников — внешний, внутренний, пять прилежащих к вершинам внешнего и один, образованный



серединами сторон (доказательство их правильности оставляем читателю). Два исходных пятиугольника присутствуют на рисунке: в случае 1 это $INTWR$ и $NOPQR$; в случае 2 — $INTWR$ и $STUVW$.

7. Какое наименьшее количество Т-тетрамино надо вырезать из шахматной доски так, чтобы больше ни одного Т-тетрамино вырезать было нельзя? Т-тетрамино — это четырёхклеточная фигурка в виде буквы Т:  .

Решение:

Ответ: 7. *Пример* показан на рис. 1.

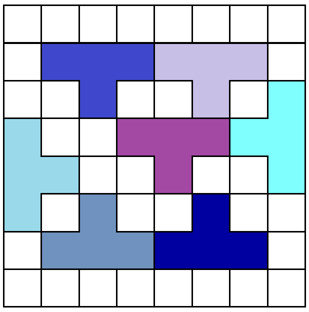


Рисунок 1

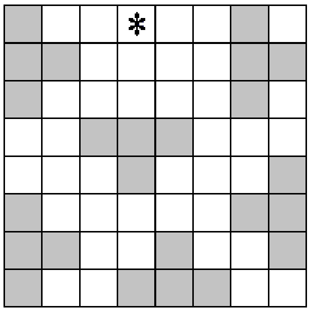


Рисунок 2

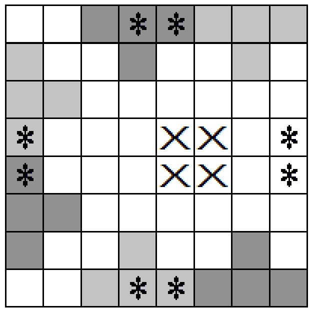


Рисунок 3

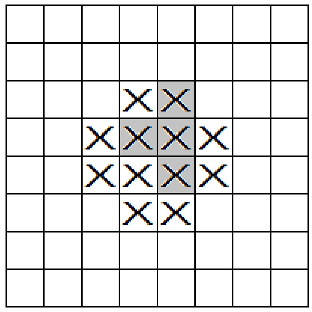


Рисунок 4

Оценка. Предположим, что нам удалось отметить 6 или менее тетрамино требуемым образом. Тогда каждая из тетраминошек, закрашенных на рис. 2, должна пересекаться с одной из отмеченных тетраминошек (иначе можно было бы отметить ещё одну тетраминошку). Однако одна отмеченная тетраминошка не может пересекаться с двумя или более закрашенными. Поэтому каждая отмеченная тетраминошка должна пересекать ровно одну закрашенную. Но тогда клетка, помеченная звёздочкой, не входит ни в одну отмеченную тетраминошку.

Итак, если можно отметить на доске 6 тетраминошек, то ни одна из них не содержит клеток наподобие отмеченных звёздочкой. Посмотрим на рисунок 3. Здесь тоже ни одна отмеченная тетраминошка не может пересекать более одной закрашенной, поэтому каждая отмеченная пересекает ровно одну закрашенную. Но тогда 4 клетки, помеченные крестиком, не содержат отмеченных тетраминошек.

Рассматривая клетки, симметричные тем, что помечены крестиками, получаем большую область в центре квадрата (см. рис. 4), в которой не может быть тетраминошек. Очевидно, туда можно поместить ещё одну тетраминошку.