8 класс

1. На клетчатую доску 2018×2018 легла клетчатая змея, имеющая раскраску «зелёная клетка — красная — зелёная — синяя — зелёная — красная — зелёная — синяя и т. д.». Обнаружились две красные клетки, соседние по диагонали. Докажите, что змея поворачивает в одной из зелёных клеток.

Решение:

Допустим, что змея поворачивает только в красных и синих клетках. Пусть одна из двух красных клеток, о которых идёт речь в задаче, имеет координаты (x, y). Тогда у следующей за ней (по ходу змеи) синей клетки одна координата такая же, а другая отличается на 2, то есть чётность каждой из координат такая же. У следующей красной клетки тоже, и т. д. Тогда у всех красных (и всех синих) клеток одинаковая чётность координат, поэтому две красные клетки не могут быть соседними по диагонали.

2. На основании AE трапеции $ABCE$ выбрана такая точка D, что $S_{ABCD} = S_{CDE}$. Известно, что $ABCD$ — параллелограмм, и его диагонали пересекаются в точке O. На отрезке DE выбрана точка T. Докажите, что если $OT \parallel BE$, то $OD \parallel CT$.

Решение:

1) Поскольку $ABCD$ — параллелограмм, то $AO = OC$, $BO = OD$, $AD = BC$.

2) Из формул площади параллелограмма и треугольника следует, что $DE = AD + BC$, откуда $DE = 2AD$.

3) $BO = OD$, $OT \parallel BE$, поэтому $DT = TE$ по теореме Фалеса. Значит, T — середина DE, и $DT = AD$.

4) $AD = DT$, $AO = OC$, поэтому $OD \parallel CT$ как средняя линия $\triangle ACT$, что и требовалось доказать.

3. В многограннике все грани треугольные или четырёхугольные. Каждую из граней покрасили в чёрный или белый цвет так, что любые две соседние грани оказались окрашены в разные цвета. Оказалось, что белых и чёрных треугольных граней поровну. Докажите, что белых и чёрных четырёхугольных граней тоже поровну.

Решение:

Суммарное количество сторон чёрных граней (S_B) равно суммарному количеству сторон белых граней (S_W) (и равно количеству рёбер). В то же время это количество равно утроенному количеству треугольников плюс учетверённому количеству четырёхугольников соответствующего цвета: $S_B = 3T_B + 4Q_B$, $S_W = 3T_W + 4Q_W$. Поскольку $T_B = T_W$, то и $Q_B = Q_W$.

4. Знакомый вам по первому туру Вася придумал n последовательных натуральных чисел, для каждого выписал сумму цифр, и в результате тоже получил n последовательных чисел (возможно, не по порядку). При каком максимальном n это возможно?

Решение:

Ответ: при $n = 18$.

Пример: числа $392, 393, \ldots 399, 400, 401, \ldots 409$ имеют суммы цифр $14, 15, \ldots, 21, 4, 5, \ldots, 13$, то есть все от 4 до 21.

Оценка. Пусть $n \geqslant 19$.

а) Если все числа находятся в пределах одной сотни ($\ldots 00$–$\ldots 99$), то разность суммы цифр 18 достигается только для чисел ...00 и ...99. Значит, они оба должны входить в диапазон, но тогда в диапазоне 100 чисел и всего 19 разных сумм цифр.

б) Если числа не помещаются в одной сотне, то среди них есть число x, которое кончается на 00. Заметим, что среди чисел предыдущей сотни $x - 11 = \ldots 89$ имеет ту же сумму цифр, что и $x-2=\ldots 98$; а среди чисел следующей сотни $x+10=\ldots 10$ имеет ту же сумму цифр, что и $x+1=\ldots 01$. Значит, $x-11$ и $x+10$ не могут входить в рассматриваемый диапазон. Но тогда в диапазоне максимум 20 чисел (от $x-10$ до $x+9$).

Если $x=\ldots 000$, то разность сумм цифр x и $x+1$ равна 26, что слишком много. Если же x кончается только на два нуля, то $x-10$ имеет ту же сумму цифр, что и $x+8$, а $x-9$ — ту же, что и $x+9$. Поэтому в диапазоне не больше 18 чисел, ч. т. д.

5. Дима придумал два взаимно простых числа a и b, а потом нашёл остатки от деления на a у чисел b, b^2, b^3, …, b^{999}. Может ли первое из получившихся у него чисел оказаться больше суммы остальных?

Решение:
Да. Например, рассмотрим числа $a=3^{1002}-1, b=3^{1001}$.
Заметим, что $b^i=3^{1001i}=3^{1002i-i}=3^{1002(i-1)}\cdot 3^{1002-i}\equiv 3^{1002-i} \pmod{3^{1002}-1}$.
Поэтому $b^2+b^3+\ldots+b^{999}\equiv 3^{1000}+3^{999}+\ldots+3^3<3^{1001}-1$,
в то время как $b\equiv 3^{1001}-1 \pmod{a}$.

6. В прямоугольном треугольнике ABC точка M — середина гипотенузы AB. На луче CM отмечены точки X и Y. Известно, что прямые XA и YA образуют одинаковые углы с прямой AC. Докажите, что прямые XB и YB образуют одинаковые углы с прямой BC.

Решение:
Достроим $\triangle ABC$ до прямоугольника $ADBC$. По свойству биссектрисы треугольника, $DX:DY=AX:AY$. В то же время, используя различные формулы площади треугольника, получаем: $S_{ACX}:S_{ACY}=CX:CY=AX:AY$. В итоге имеем: $DX:DY=CX:CY$.

Пусть $X'\in[CM)$ — такая точка, что BX' и BY образуют равные углы с BC (нам требуется доказать, что X' совпадает с X). Тогда, рассуждая как для прямых AX и AY, получим: $DX':DY=CX':CY$.

Из соотношений $DX:DY=CX:CY$ и $DX':DY=CX':CY$ следует, что X' совпадает с X, поскольку при сдвиге точки X длины отрезков DX и CX изменяются в разные стороны.

Существуют и другие решения, например, в координатах.

7. На столе лежат 102 конфетки, полезности которых равны $-101, -99, -97, \ldots, 99, 101$. Саша и Женя играют в игру, делая ходы по очереди (начинает Саша). За один ход нужно съесть две конфетки, суммарная полезность которых неотрицательна. Тот, который не может сделать ход, проигрывает. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

Решение:
Выигрывает Женя, пользуясь следующей стратегией. Если Саша съел(а) две полезные конфетки a и b, то Женя съедает произвольную полезную конфетку c и вместе с ней $-c$. Если же Саша съел(а) полезную конфетку d и вредную $-e$, то Женя съедает конфетку e и любую другую полезную конфетку (а если конфетка e уже съедена, то съедает любые две полезные конфетки).

В результате после хода Жени выполняются следующие утверждения: (1) количество оставшихся полезных конфет делится на 3; (2) если полезная конфета k ещё не съедена, то и $-k$ не съедена. Поэтому каждый следующий ход Жени, соответствующий этой стратегии, осуществим.

Существуют и другие выигрышные стратегии, например, такая. Если Саша съедает одну полезную конфету и одну вредную, то Женя — две наименьших полезных конфеты; если Саша съедает полезную и вредную, то Женя — наименьшую по модулю вредную и наименьшую полезную. В результате после хода Жени выполняются следующие утверждения: (1) количество оставшихся полезных конфет делится на 3; (2) наименьшая оставшаяся полезная конфета по модулю не больше, чем наибольшая по модулю оставшаяся вредная. Это позволяет Жене делать ходы и дальше.