7 класс

1. Вася выписал 20 последовательных натуральных чисел в некотором порядке. Докажите, что найдутся два числа, стоящих рядом, у которых совпадает хотя бы одна цифра.

Решение:

Среди 20 последовательных чисел найдутся 10 из одного десятка, причем ясно, что они не однозначные; у них совпадает цифра разряда десятков — обозначим ее через N.

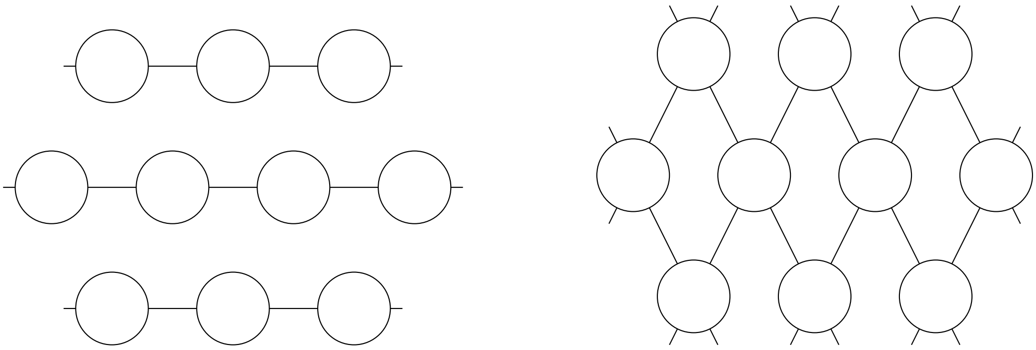
Кроме того, каждая цифра, в частности N, ровно два раза встречается среди последних цифр 20 подряд идущих чисел; из них — только один раз в обозначенном нами десятке.

Таким образом, у нас есть одиннадцать чисел с цифрой N. Тогда если разбить 20 выписанных Васей чисел на 10 пар рядом стоящих, найдется пара, в которой оба числа содержат N.

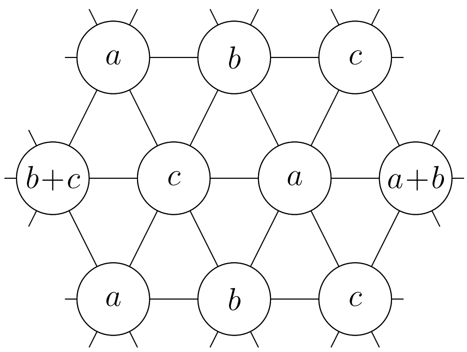
2. В каждый кружочек записали число. Оказалось, что суммы чисел вдоль каждой прямой равны. Чему равна сумма чисел в табличке?

Решение:

Пусть сумма чисел в одном ряду равна S. Тогда с одной стороны, сумма всех чисел в таблице равна $3S$, а с другой стороны равна $4S$. Значит, $S = 0$.

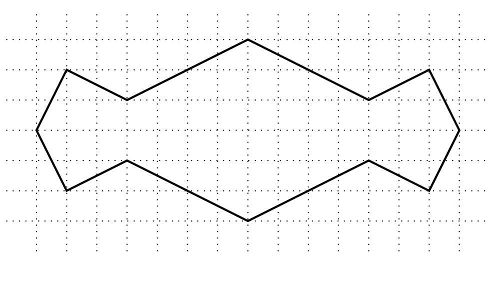


Можно еще было, приравнивая суммы в пересекающихся рядах, посчитать значения чисел.

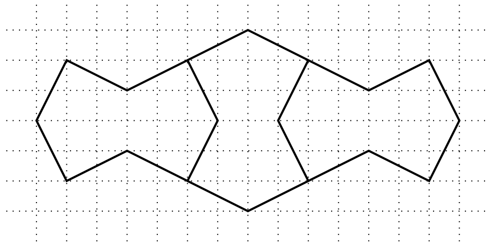


Обратите внимание, числа **не обязаны быть равными 0**.

3. Разрежьте конфету на 3 равные части.



Решение:



4. На бумажке было написано огромное число. Максим порвал бумажку на клочки. На каждом клочке оказалось число от 1 до 100 500, причем каждое число встретилось по разу. Максим утверждает, что на бумажке была написана степень двойки. Докажите, что он что-то перепутал.

Решение:

Известно, что натуральное число дает такой же остаток от деления на 3, что и сумма его цифр. В огромном числе такая же сумма цифр, как во всех числах от 1 до 100 500, то есть его остаток от деления на 3 такой же, что и у суммы чисел от 1 до 100 500. А эта сумма делится на 3. Получаем, что на бумажке было написано число, кратное трём, и это не степень двойки.

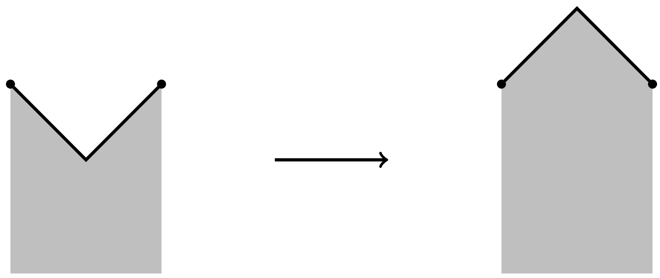
5. Из 16 одинаковых кусков проволоки (см. правый рисунок) нужно выложить замкнутый контур. Все звенья должны идти либо горизонтально, либо вертикально. Какую наибольшую площадь можно так ограничить?

Решение:

Заметим, что выложить контур из 16 данных кусков — то же самое, что выложить фигуру из 16 одинаковых отрезков, лежащих под углом 45°, а потом положить на каждый отрезок кусок так, чтобы концы куска и отрезка совпали.

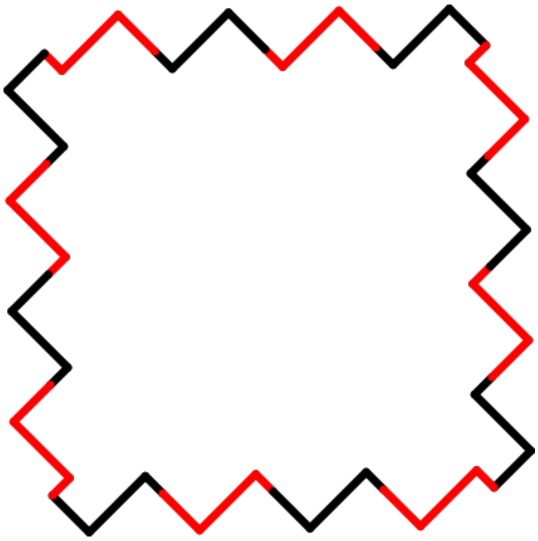
Когда мы заменяем отрезок на кусок проволоки, площадь, ограничиваемая контуром, либо растет на 1,5 см^2, либо уменьшается на ту же самую величину. То есть площадь итогового контура превышает площадь фигуры, ограничиваемой отрезками, максимум на $1{,}5 \cdot 16 = 24$ см^2.

Теперь займемся поиском фигуры максимальной площади, которую можно ограничить вышеописанными отрезками. Все углы в нашей фигуре либо 90°, либо 270°. Если там есть второй угол — то площадь можно увеличить:



Таким образом, искомая фигура — прямоугольник. Их можно, например, перебрать, получить, что максимальная площадь у квадрата: 288 см^2.

В итоге имеем оценку $288 + 24 = 312$ см^2, которая достигается, например так:



6. В отряде сто человек, у каждого по три друга в отряде. На дежурство требуется назначать по три человека, среди которых каждый дружит с каждым. 99 дней подряд удавалось назначать тройки дежурных, не повторяя их. Докажите, что это удастся и на сотый день.

Решение:

Назовем *лентяем* человека, который дежурил меньше трех раз. Остальных назовем *трудолюбивыми*. Если сложить, сколько подежурил каждый из людей, то, так как каждый раз дежурит трое, получится $99 \cdot 3 = 300 - 3$. Ясно, что больше трех раз не подежурить, а тогда лентяев не более трёх.

Посмотрим на какого-нибудь лентяя, пусть его зовут Петя. У Пети есть трудолюбивый друг, иначе лентяев слишком много. Этот друг только один раз мог подежурить без Пети. Значит, Петя дежурил ровно дважды.

А если у Пети два трудолюбивых друга, то каждый дважды дежурил с Петей. То есть каждое Петино дежурство включало именно этих друзей, хотя тройки дежурных по условию не повторялись. Значит, два Петиных друга тоже лентяи.

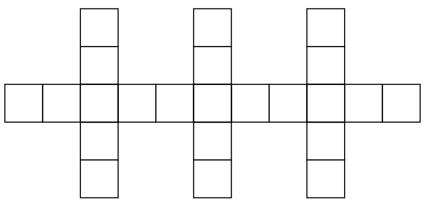
Так как лентяев всего трое, то они дружат друг с другом. Но подежурить вместе они еще не могли: каждый дежурил с каким-то трудолюбивым другом. Значит, мы нашли претендентов на 100-е дежурство, что и требовалось.

7. При каких $n \geqslant 5$ любую фигурку из $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ клеток можно разрезать по сторонам клеток на n фигурок попарно различной площади?

Решение:

Ни при каких. Сконструируем для каждого $n \geqslant 5$ фигурку, которую нельзя разрезать требуемым образом.

Выберем пока произвольные натуральные числа x и l, возьмем прямоугольник $1 \times (x + l + xl)$. К каждой $(l + 1)$-ой клетке подсоединим по бокам два прямоугольника $l \times 1$. Получится фигура из $3xl + x + l$ клеток. Например, при $l = 2$, $x = 3$ получится такая фигура:



Теперь обратим внимание на x клеток, имеющих по 4 соседа. Любая фигура из хотя бы $l+1$ клетки занимает одну из них, то есть в любом разрезании такой фигурки на части будет не более x частей размера $> l$.

Пусть теперь $x = \lfloor n/2 \rfloor$ и $l = \lceil n/2 \rceil - 1$ ($\lfloor \cdot \rfloor$ и $\lceil \cdot \rceil$ обозначают округление вниз и вверх соответственно). Проверим, что в полученной фигуре больше, чем $1+2+3+\ldots+n$ клеток. Действительно, при $n=5$ имеем

$$3xl + x + l = 3 \cdot 2 \cdot 2 + 2 + 2 = 16 > 15,$$

а при переходе от n к $n+1$ ровно одно из чисел x и l увеличивается на 1 (например, потому что $x + l = n - 1$). То есть искомое выражение увеличивается на $3x+1$ или $3l+1$. Легко видеть, что к искомому выражению добавляется больше, чем $n+1$, то есть неравенство сохраняется.

Осталось удовлетворить условие, что в фигуре должно быть *ровно* $1+2+\ldots n$ клеток, и проверить, что разрезать нельзя. Выкинем нужное число клеток, чтобы фигурка осталась связной. Если мы можем разрезать полученную фигурку нужным образом, то, возвращая выкинутые клетки и приклеивая их к частям как попало, получаем разрезание исходной фигуры на n кусков, где не более $\lceil n/2 \rceil - 1$ частей размера $\lceil n/2 \rceil - 1 = l$. А тогда частей размера больше l у нас $n - (\lceil n/2 \rceil - 1) = \lfloor n/2 \rfloor + 1 = x + 1 > x$. Полученное противоречие завершает решение.

8. В туманном городе Лондоне ровно 10^{10} клубов, а в каждом клубе ровно 10 джентльменов. Вражеский шпион хочет похитить несколько джентльменов так, чтобы среди похищенных был хотя бы один член каждого клуба. Оказалось, что для любых двух клубов найдётся джентльмен, состоящий в них обоих. Докажите, что шпиону достаточно похитить 9 джентльменов.

Решение:

Рассмотрим произвольный клуб, например «Диоген». Поскольку для произвольного клуба в нем состоит некий джентльмен из «Диогена», один из джентльменов «Диогена» (скажем, Вася) состоит более чем в 10^9 клубах.

Пусть шпиону недостаточно похитить только Васю, тогда существует клуб «Диоген-2», в котором не состоит Вася. Тогда во всех клубах, в которых состоит Вася, есть некий джентльмен из Диогена-2. Значит, существует джентльмен из Диогена-2 (Вася-2), который состоит вместе с Васей более чем в 10^8 клубах.

Продолжая такие рассуждения, получаем, что существуют такие джентльмены Вася, Вася-2, $\ldots$, Вася-10, что они все состоят более чем в 1 клубе. Противоречие.