7 класс

1. Назовем число несчастливым, если любые две его цифры подряд образуют двузначное число, кратное 13. Сколько существует стозначных несчастливых чисел?

Решение:

Заметим, что если мы знаем первую цифру числа, то знаем все остальные (максимум одно двузначное число, начинающееся на данную цифру, кратно 13). Выпишем все двузначные числа, кратные 13:

$$13,\ 26,\ 39,\ 52,\ 65,\ 78,\ 91.$$

При этом на 78 число начинаться не может, так как третью цифру согласно условию не написать. Остальные варианты подходят, в итоге ответ 6.

2. Натуральные числа a, b, c, d таковы, что

$$a+b \vdots 2, \quad a+c \vdots 3, \quad a+d \vdots 4, \quad b+c \vdots 5, \quad b+d \vdots 6, \quad c+d \vdots 7.$$

Какова минимальная сумма этих чисел?

Решение:

Ответ: 18.

Пример: $a=3$, $b=1$, $c=9$, $d=5$.

Заметим, что из второго и пятого условий сумма всех чисел кратна 3. Теперь посмотрим на значения $a+d$ и $b+c$. Если это 4 и 5, то все делимости превращаются в равенства и легко получить противоречие. Если $a+d=4$, а $b+c=10$, то сумма всех чисел не кратна 3; то же самое и в случае, когда $b+c=5$, а $a+d=8$ или $a+d=12$. Если $a+d=4$ и $b+c \geqslant 15$ или $b+c=5$ и $a+d \geqslant 16$, то сумма уже больше 18.

3. 2018^2 монеток выложили квадратом 2018×2018. Петя выбирает какую-нибудь монетку, записывает, сколько монеток лежит с ней в одной строке или одном столбце (считая её саму) и выкидывает её. Он делает так, пока монетки не закончатся. Чему может быть равна сумма записанных им чисел в конце?

Решение:

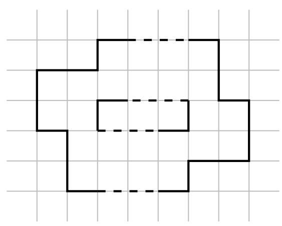
Каждая пара монет, лежащих в одном ряду (вертикальном или горизонтальном), даст ровно одно очко (когда Петя уберет первую из них). Таких пар $2 \cdot \frac{2018^2 \cdot 2017}{2}$. Кроме того, надо еще учесть сами монеты, которых 2018^2. В сумме получаем 2018^3.

4. Вася нарисовал клетчатую фигурку. Оказалось, что ее можно разрезать на квадратики 2×2, а можно разрезать на зигзаги из 4 клеток. Сколько клеток может быть в Васиной фигурке?

Решение:

Ответ: любое число, кратное 8, начиная с 16.

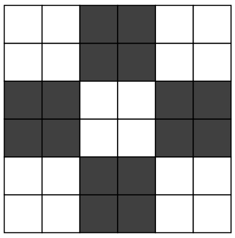
Пример:

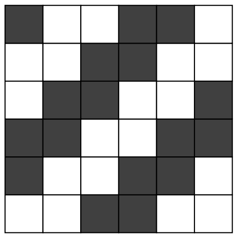


Оценка: докажем, что число клеток кратно 8, то есть что фигурок при разрезании получается четное число. Это можно делать двумя способами.

Способ 1. Покрасим доску в шахматную клетку 2×2. Каждый квадрат занимает четное число клеток, а каждый зигзаг — нечетное. Поэтому количество фигурок четно.

Способ 1′. Покрасим доску лесенкой. Каждый квадрат занимает нечетное число клеток, а каждый зигзаг — четное. Поэтому количество фигурок четно.





Слева картинка для способа 1, справа — для 1′.

Способ 2. Заметим, что в каждой строке и в каждом столбце такой фигурки четное число клеток, так как её можно разрезать на квадратики 2×2.

Разрежем фигурку на косые тетрамино и посмотрим на вертикальные из них. В самой верхней строчке четное число вертикальных косых тетраминошек. Выкинем их. Из каждой строчки и из каждого столбца при этом ушло четное число клеток. Повторим эту операцию последовательно сверху вниз для каждой из строчек. В итоге получим, что вертикальных косых тетраминошек четное число. Аналогично, горизонтальных тетрамино четное число.

Осталось заметить, что 8 не подходит. Это очевидно, так как у нас есть только два различных способа составить фигурку из двух квадратов.

5. На доске 3×99 в центральной клетке стоит фишка. К доске подходят Магнус и Сергей и по очереди начинают двигать фишку на одну или две клетки по вертикали или по горизонтали. Запрещается останавливать фишку в клетке, где она уже была. Проигрывает тот, кто не может походить. Кто выиграет при правильной игре, если начинает Магнус?

Решение:

Разобьем всю доску без центральной клетки на доминошки. Если Магнус ставит фишку в какую-то из доминошек, то Сергей перемещает фишку во вторую клетку этой доминошки. При такой стратегии Магнус всегда будет вынужден ходить в еще не посещенную доминошку, когда-то они закончатся и Сергей победит.

6. В целях конспирации Организация посылает на разведку не одного агента, а нескольких: первый узнает информацию, передает её второму, тот — третьему и т. д. до последнего, который уже сообщает информацию в главный штаб. Разумеется, соседние агенты в такой цепочке должны быть знакомы друг с другом. Сейчас в Организации работают 2000 агентов. Какое наибольшее количество пар незнакомых может быть среди них, если на дело может пойти любая группа из 400 агентов?

Решение:

Оценка: для каждого агента есть не более 398 не знакомых с ним, иначе можно выбрать 400 агентов, так что один из выбранных не знает никого из оставшихся. То есть пар незнакомых у нас не более $\frac{2000 \cdot 398}{2} = 398\,000$.

Пример: покажем, что эта оценка достигается. Усадим всех агентов на стулья по кругу через равные промежутки, познакомим каждого с $(2000-1-399)/2 = 800$ стоящими за ним по часовой стрелке, с 800, стоящими за ним против часовой стрелки, и со стоящим напротив. Выберем каких-нибудь 400 агентов, оставим их на месте, а остальных прогоним. Посмотрим на количество стульев между соседними агентами.

- Если есть не более одного промежутка в $\geqslant 800$ стульев, то можно всех выстроить в цепочку, где каждый следующий — следующий по часовой стрелке.
- Если есть два таких промежутка, то они оба ровно по 800 стульев (так как пустых стульев всего $2000 - 400 = 800 \cdot 2$), а кроме того больше пустых стульев нет. То есть у нас есть две группы по $\leqslant 400 < 800$ человек, сидящих подряд, и разделенных 800 стульями с обеих сторон. Легко видеть, что в каждой из групп все друг друга знают, а кроме того есть агенты из разных групп, сидящие напротив. Тогда снова всех можно выстроить в цепочку.

7. Некто сложил несколько первых натуральных чисел и с постыдным удовлетворением отметил, что получилась сумма двух одинаковых степеней двойки и тройки. Мог ли он быть прав?

Решение:
Запишем это уравнение в более привычном виде

$$1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} = 2^m + 3^m.$$

Домножим обе части на 2 и рассмотрим уравнение по модулю 9. Левая часть может принимать значения 0, 2, 3 и 6, а правая 1, 2, 4, 5, 7 и 8. Значит обе части равны двум по модулю 9. Глядя на правую часть, видим, что m делится на 6. Тогда, рассмотрим уравнение по модулю 7. Справа у нас снова 2, а левая часть никогда не принимает такого значения по модулю 7.