6 класс

1. У Максима было число 4. Вот как-то раз он то ли прибавил к нему 1, то ли умножил на 1, затем к результату то ли прибавил 2, то ли умножил на 2, затем то ли прибавил 3, то ли умножил на 3, и т. д. Десятым действием он то ли прибавил 10, то ли умножил на 10 и получил 1000. Как такое могло произойти?

Решение:

Способ 1.

$4+1=5, +2=7, +3=10, +4=14, \times 5=70, +6=76, +7=83, +8=91, +9=100, \times 10=1000$

Способ 2.

$4+1=5, +2=7, \times 3=21, \times 4=84, +5=89, +6=95, +7=102, +8=110, \times 9=990, +10=1000$

Критерии оценки:

- Полное решение "— 4 балла.
- Есть осмысленная попытка пойти с конца, но пример не построен из-за арифметической ошибки или неутченного варианта — 1 балл.
- Остальное — 0 баллов.

Замечание. В этой задаче требуется только пример, его наличие необходимо и достаточно для получения полного балла.

2. По кругу стоят десять стаканов с водой и берёзовым соком, внешне неразличимые (однако различающиеся на вкус). Известно, что берёзовый сок — в каких-то пяти стаканах подряд. Можно ли, пробуя жидкость из разных стаканов, гарантированно отыскать три нетронутых стакана с соком?

Решение:

Способ 1. Пьём два стакана напротив. Заметим, что в этих стаканах разные напитки (т.к. в пяти подряд стаканах сок, то напротив в пяти стаканах будет вода). Дальше пьем стаканы за водой подряд, пока не наткнёмся на сок, определив границы сока и попортив максимум два стакана с соком.

Способ 2. Пьём всё подряд, пока не наткнёмся на сок. Пропускаем три стакана за этим, по часовой стрелке, и пьём опять. Дальше пятимся к початому стакану сока, пока не наткнёмся на сок опять, определив границы сока и попортив максимум два стакана с соком.

3. На автобусном маршруте всего четыре остановки — «Начальная», «Первая», «Финальная» и «Конечная». На первых двух остановках пассажиры только заходили, на остальных — только выходили. Оказалось, что на «Начальной» зашло 30 пассажиров, на «Конечной» вышло 14 пассажиров. На «Первой» зашло втрое меньше пассажиров, чем вышло на «Финальной». Каких пассажиров больше — едущих с «Начальной» на «Конечную», или едущих с «Первой» на «Финальную», и на сколько?

Решение:

Ответ: едущих с «Первой» на «Финальную» больше на шесть.

Обозначим за x количество зашедших на «Первой». Тогда на «Финальной» вышло $3x$. Поскольку количество зашедших равно количеству вышедших, получаем $30+x=3x+14$, откуда $x=8$. Обозначим за y едущих с «Начальной» на «Конечную». Тогда едущих с «Начальной» на «Финальную» $8-y$. Они составляют вместе с едущими с «Первой» на

«Финальную» 14 человек. Значит, едущих с «Первой» на «Финальную» $14-8+y=6+y$. Т.е. на шесть человек больше, чем едущих с «Начальной» на «Конечную».

4. Барон Мюнхгаузен поставил по коню в некоторые клетки доски $N\times N$. Он утверждает, что никто не найдёт два разных квадрата 4×4 на этой доске (со сторонами, идущими по линиям сетки), в которых коней поровну. При каком наибольшем N его слова могут быть правдой?

Решение:

Ответ: $N=7$.

Коней в квадрате 4×4 может быть от 0 до 16, т. е. всего 17 вариантов. Количество квадратов 4×4 на доске $N\times N$ равно $(N-3)^2$ (поскольку верхняя левая клетка квадрата может занимать по горизонтали от крайней левой позиции до четвертой справа, то же по вертикали). Чтобы не было повторений, количество квадратов должно быть не больше 17, т.е. $(N-3)^2\leqslant 17$. Значит, N не может быть больше семи, т.к. тогда $(N-3)^2\geqslant(8-3)^2=25>17$.

При $N=7$ можно построить пример, показанный справа (кони расставлены в закрашенных клетках; в левой верхней клетке каждого квадрата указано количество коней в этом квадрате).

16	15	14	13			
12	11	10	9			
8	7	6	5			
4	3	2	1			

5. Можно ли разбить числа от 1 до 80 на четвёрки так, чтобы в каждой четвёрке наибольшее число равнялось сумме трёх остальных?

Решение:

Ответ: нет, нельзя.

Способ 1. Предположим, что такое возможно. Заметим, что групп всего 20. Посмотрим на сумму наибольших чисел всех групп. Она не больше суммы 20 наибольших чисел, т.е. $61+62+\ldots+79+80=(61+80)+(62+79)+\ldots+(70+71)=141\cdot 10=1410$. Это меньше суммы остальных 60 чисел, так как эта сумма не меньше $1+2+\ldots+60=61\cdot 30=1830$. Но поскольку в каждой группе наибольшее равняется сумме остальных, то и суммы по всем группам должны быть равны. Противоречие.

Способ 2. Предположим, что такое возможно. Заметим, что групп всего 20. Поскольку в каждой группе наибольшее число равняется сумме остальных, то сумма наибольших чисел в группах равна половине суммы всех чисел. Сумма всех чисел равна $1+2+\ldots+80=81\cdot 40=3240$, значит сумма наибольших должна равняться 1620. Но этого не может быть, т.к. каждое число не больше 80, т.е. эта сумма не больше $80\cdot 20=1600$. Противоречие.

6. У Пафосного Вовы есть Айфон XXX, а на Айфоне том — калькулятор с голосовыми командами: «Умножь число моё на два и двойку отними от результата», «Изволь на три моё число домножить, да потом ещё прибавь четыре» и, наконец, «Прибавь-ка семь к числишку моему!» Айфон в курсе, что изначально у Вовы было числишко 1. Сколько существует четырёхзначных чисел, которые теоретически Айфон XXX мог бы получить, покорно выполняя Вовины команды?

Решение:

Ответ: 9000 (или 18000, если учитывать отрицательные).

Докажем, что можно получить вообще все четырёхзначные числа. Заметим, что команда $+7$ дает возможность получить из текущего числа все большие числа с таким же остатком от деления на семь. Тогда достаточно с помощью первых двух кнопок получить по представителю каждого из семи остатков $(0,1,\ldots,6)$.

Изначально у нас есть 1. Из 1 можно получить число 7 ($3 \cdot 1 + 4 = 7$) – представителя остатка 0. Из числа 7 можно получить представителей остатка 5 ($2 \cdot 7 - 2 = 12$) и остатка 4 ($3 \cdot 7 + 4 = 25$). Из числа 25 получается представитель остатка 6 ($2 \cdot 25 - 2 = 48$) и остатка 2 ($3 \cdot 25 + 4 = 79$). Из числа 79 можно получить представителя остатка 3 ($3 \cdot 79 + 4 = 241$). Таким образом, мы получили представителей всех остатков, из которых сможем получить все четырёхзначные числа с помощью кнопки +7. А четырехзначных чисел всего 9000.

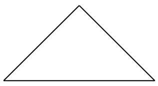
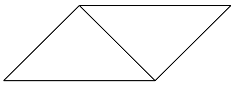
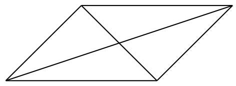
Замечание. В задаче подразумевались натуральные четырёхзначные числа. Впрочем, для отрицательных работает аналогичное решение, только сначала нужно получить с помощью многократного повторения операции $2 \cdot x - 2$ многозначное отрицательное число с остатком 1 от деления на 7 (при данной операции остатки чередуются 1 – 0 – 5 – 1).

7. В отряде сто человек, у каждого по три друга в отряде. На дежурство требуется назначать по три человека, среди которых каждый дружит с каждым. 99 дней подряд удавалось назначать тройки дежурных, не повторяя их. Докажите, что это удастся и на сотый день.

Решение:

Способ 1. Предположим, что не удастся, т.е. все возможные тройки подежурили. Рассмотрим какую-нибудь дежурную тройку A, B, C. Предположим, что кто-то из них дежурил еще с кем-то не из этой тройки (обозначим за A и D). Поскольку у каждого в отряде всего по три друга, то у A нет друзей, кроме B, C, D. Тогда в дежурстве A и D третьим мог быть только B или C. Не умаляя общности, считаем, что это B. У B друзья A, C, D. У C третьим другом может быть либо D, либо какой-то человек из остального отряда (обозначим за E). В первом случае A, B, C, D дружат между собой и образуют четыре дежурных пересекающихся тройки. Во втором случае C и E не могли дежурить вместе, т.к. E не входит в число друзей A, B, т.е. с другими дежурствами две рассматриваемые дежурные тройки не пересекаются.

Получается, что с точки зрения пересечений дежурств, все дежурные тройки разбиваются на группы трех видов:

I  II  III 

В группу каждого вида людей входит не меньше, чем дежурств, причем в группе первого вида людей больше на два. Так как дежурств всего 99 — нечетное количество, то хотя бы одна группа первого вида присутствует. Но тогда людей больше хотя бы на два, чем групп, т.е хотя бы 101 — противоречие.

Способ 2. Заметим, что каждый человек может участвовать в дежурстве максимум три раза. Этот максимум достигается, только если все его три друга дружат между собой. Более того, в такой ситуации все его друзья тоже могут подежурить по три раза (т.к. дружат с ним и между собой). Посчитаем общее количество выходов на дежурства. Оно должно быть не меньше 99 дежурств $\times 3$ человека $= 297$ и не больше 100 людей $\times 3$ дежурства $= 300$. Если есть хотя бы один человек, у которого меньше трех выходов, то у его друзей тоже, значит общее количество выходов не больше $300 - 1 - 3 = 296$. Противоречие. Если такого человека нет, то у каждого друзья дружат между собой, значит все люди разбиваются на четверки, этих четверок $100/4 = 25$, каждая дает по 4 дежурства, и всего их 100.