# 6 класс

**1.** На каждом заседании Клуба Нумизматов рассматривают четыре монеты и определяют самую дорогую и самую дешёвую из них. Алиса принесла в Клуб пять старинных монет различной стоимости. Как за три заседания Клуба определить среднюю по стоимости из этих монет?

Решение:

**1 способ.**

Заметим, что средняя по стоимости монета не является ни самой дорогой, ни самой дешевой ни в какой четверке.

1 заседание: рассматриваем любую четвёрку монет. Тем самым мы определяем 2 монеты, которые точно не средние.

2 заседание: заменяем самую дорогую по стоимости из первой четверки монету на ранее не использовавшуюся. В результате первых двух действий получаем как минимум 3 «точно не средние» монеты. (Если таких монет получилось 4, то третье заседание не требуется.)

3 заседание: Берём оставшиеся 2 подозрительные монеты и те две, которые были названы тяжёлыми. Самой лёгкой в этой четвёрке может оказаться только одна из подозрительных монет, тем самым оставшаяся будет средней по стоимости.

**2 способ.**

1 заседание: рассмотрим любую четвёрку монет.

2 заседание: уберём из первой четвёрки самую дорогую монету и добавим не участвовавшую в первой четверке. Заметим, что самая дорогая из этой четвёрки и убранная не могут быть средней.

3 заседание: вернёмся к первой четвёрке монет, но теперь заменим на не участвовавшую в ней самую дешёвую из первой четвёрки. Заметим, что эти две самых дешёвых в своих четвёрках тоже не могут быть средней. Итого мы исключили из пяти монет все, кроме одной.

**2.** Вася заметил, что его новогодняя гирлянда состоит из ста расположенных в ряд лампочек трёх цветов: красных, жёлтых и зелёных. Докажите, что в ней обязательно найдётся лампочка, отличающаяся цветом от двух следующих за ней.

Решение:

Для каждого из цветов рассмотрим последнюю лампочку данного цвета. Из этих трёх лампочек выберем ту, которая встретилась первой. Она подходит.

**3.** Программа для каждого четырехзначного числа печатает произведение его цифр. Какие числа будут напечатаны программой ровно один раз?

Решение:

Ответ: 1, $5^4(625)$, $7^4(2401)$, $8^4(4096)$, $9^4(6561)$.

Ясно, что 0 будет напечатан несколько раз. Заметим, что перестановка цифр в числе не меняет его произведения, поэтому один раз могут быть напечатаны только произведения цифр чисел с одинаковыми цифрами. Несложно видеть, что произведения цифр в числах 1111, 5555, 7777, 8888 и 9999 уникальны, поскольку соответствующие произведения единственным образом раскладываются в произведение четырёх множителей, меньших 10. Для чисел 2222, 3333, 4444 и 6666 это неверно.

**4.** У Васи есть четыре неотрицательных числа с суммой 24. Каждое число можно заменить на меньшее его (но можно число и не менять), после чего числа можно переставить. Вася утверждает, что любую четверку неотрицательных чисел с суммой 12 он может получить из своей четвёрки такими действиями. Могут ли его слова быть правдой?

Решение:

Расставим числа в Васиной четвёрке по убыванию. Так как есть четвёрка $(12,0,0,0)$, то первое Васино число не меньше 12. Так как можно взять четвёрку $(6,6,0,0)$, то второе Васино число не меньше 6. Рассмотрев ещё четвёрку $(4,4,4,0)$, получим, что третье Васино число не меньше 4. Используя четвёрку $(3,3,3,3)$, заключаем, что четвёртое Васино число не меньше 3.

**5.** Расставьте числа от 1 до 202 в ряд так, чтобы выполнялось условие: любые два числа, между которыми не менее 100 других чисел, отличаются не более,чем на 100.

Решение:

Расставим числа так:

$(102; 103105107\ldots 199201; 1009896\ldots 64; 1; 2; 357\ldots 9799; 202200198\ldots 106104; 101)$

или по другому

**6.** Вася нарисовал клетчатую фигурку. Оказалось, что ее можно разрезать на 533 квадратика $2\times 2$. Докажите, что её нельзя разрезать на зигзаги из 4 клеток.

Решение:

Докажем, что число клеток кратно 8, то есть что фигурок при разрезании получается четное число. Это можно делать двумя способами.

**Способ 1.** Покрасим доску в шахматную клетку $2\times 2$. Каждый квадрат занимает четное число клеток, а каждый зигзаг — нечетное. Поэтому количество фигурок четно.

**Способ 1′.** Покрасим доску лесенкой. Каждый квадрат занимает нечетное число клеток, а каждый зигзаг — четное. Поэтому количество фигурок четно.

Слева картинка для способа 1, справа — для 1′.

**Способ 2.** Заметим, что в каждой строке и в каждом столбце такой фигурки четное число клеток, так как её можно разрезать на квадратики $2\times 2$.

Разрежем фигурку на косые тетрамино и посмотрим на вертикальные из них. В самой верхней строчке четное число вертикальных косых тетраминошек. Выкинем их. Из каждой строчки и из каждого столбца при этом ушло четное число клеток. Повторим эту операцию последовательно сверху вниз для каждой из строчек. В итоге получим, что вертикальных косых тетраминошек четное число. Аналогично, горизонтальных тетрамино четное число.

**7.** На доске было написано число 1. Неугомонный Саша каждую минуту получает новое натуральное число, пытаясь вычесть из последнего записанного числа $2^{100}$. Если оказывается, что результат уже был записан раньше, или что текущее число меньше, чем $2^{100}$, то Саша прибавляет $3^{100}$. Появится ли когда-нибудь на доске число $5^{100}$?

Решение:

Ответ: Да (как и любое другое натуральное число).

Будем следить за остатком текущего числа от деления на $2^{100}$ Если получим число с таким же остатком, что и число $5^{100}$, но больше $5^{100}$, то и само число $5^{100}$ нам встретится.

Поскольку если число $a$ встречается в последовательности, то и число $a - 2^{100}$ — тоже (если не встретилось до того, то встретится сразу после него)

С остатком от деления на $2^{100}$ происходит следующее: он либо не меняется (ограниченное число раз подряд!) , либо увеличивается на остаток $3^{1}00$. Поскольку $2^{100}$ и $3^{100}$ взаимно просты, то рано или поздно мы получим все остатки по модулю $2^{100}$, в том числе и нужный, причем сколько угодно раз. Рано или поздно получим число с нужным остатком, большее $5^{100}$.