

6 класс

1. На каждом заседании Клуба Нумизматов рассматривают четыре монеты и определяют самую дорогую и самую дешёвую из них. Алиса принесла в Клуб пять старинных монет различной стоимости. Как за три заседания Клуба определить среднюю по стоимости из этих монет?

РЕШЕНИЕ:

1 способ.

Заметим, что средняя по стоимости монета не является ни самой дорогой, ни самой дешевой ни в какой четверке.

1 заседание: рассматриваем любую четвёрку монет. Тем самым мы определяем 2 монеты, которые точно не средние.

2 заседание: заменяем самую дорогую по стоимости из первой четверки монету на ранее не использовавшуюся. В результате первых двух действий получаем как минимум 3 «точно не средние» монеты. (Если таких монет получилось 4, то третье заседание не требуется.)

3 заседание: Берём оставшиеся 2 подозрительные монеты и те две, которые были названы тяжёлыми. Самой лёгкой в этой четвёрке может оказаться только одна из подозрительных монет, тем самым оставшаяся будет средней по стоимости.

2 способ.

1 заседание: рассмотрим любую четвёрку монет.

2 заседание: уберём из первой четвёрки самую дорогую монету и добавим не участвовавшую в первой четверке. Заметим, что самая дорогая из этой четвёрки и убранный не могут быть средней.

3 заседание: вернёмся к первой четвёрке монет, но теперь заменим на не участвовавшую в ней самую дешёвую из первой четвёрки. Заметим, что эти две самых дешёвых в своих четвёрках тоже не могут быть средней. Итого мы исключили из пяти монет все, кроме одной.

2. Вася заметил, что его новогодняя гирлянда состоит из ста расположенных в ряд лампочек трёх цветов: красных, жёлтых и зелёных. Докажите, что в ней обязательно найдётся лампочка, отличающаяся цветом от двух следующих за ней.

РЕШЕНИЕ:

Для каждого из цветов рассмотрим последнюю лампочку данного цвета. Из этих трёх лампочек выберем ту, которая встретилась первой. Она подходит.

3. Программа для каждого четырехзначного числа печатает произведение его цифр. Какие числа будут напечатаны программой ровно один раз?

РЕШЕНИЕ:

Ответ: $1, 5^4(625), 7^4(2401), 8^4(4096), 9^4(6561)$.

Ясно, что 0 будет напечатан несколько раз. Заметим, что перестановка цифр в числе не меняет его произведения, поэтому один раз могут быть напечатаны только произведения цифр чисел с одинаковыми цифрами. Несложно видеть, что произведения цифр в числах 1111, 5555, 7777, 8888 и 9999 уникальны, поскольку соответствующие произведения единственным образом раскладываются в произведение четырёх множителей, меньших 10. Для чисел 2222, 3333, 4444 и 6666 это неверно.

4. У Васи есть четыре неотрицательных числа с суммой 24. Каждое число можно заменить на меньшее его (но можно число и не менять), после чего числа можно переставить. Вася утверждает, что любую четверку неотрицательных чисел с суммой 12 он может получить из своей четвёрки такими действиями. Могут ли его слова быть правдой?

РЕШЕНИЕ:

Расставим числа в Васиной четвёрке по убыванию. Так как есть четвёрка $(12, 0, 0, 0)$, то первое Васино число не меньше 12. Так как можно взять четвёрку $(6, 6, 0, 0)$, то второе Васино число не меньше 6. Рассмотрев ещё четвёрку $(4, 4, 4, 0)$, получим, что третье Васино число не меньше 4. Используя четвёрку $(3, 3, 3, 3)$, заключаем, что четвёртое Васино число не меньше 3.

5. Расставьте числа от 1 до 202 в ряд так, чтобы выполнялось условие: любые два числа, между которыми не менее 100 других чисел, отличаются не более, чем на 100.

РЕШЕНИЕ:

Расставим числа так:

$(102; 103105107 \dots 199201; 1009896 \dots 64; 1; 2; 357 \dots 9799; 202200198 \dots 106104; 101)$

или по другому

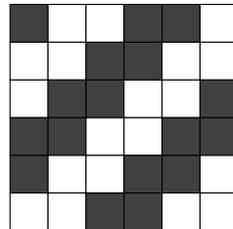
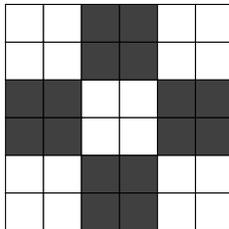
6. Вася нарисовал клетчатую фигурку. Оказалось, что ее можно разрезать на 533 квадрата 2×2 . Докажите, что её нельзя разрезать на зигзаги из 4 клеток.

РЕШЕНИЕ:

Докажем, что число клеток кратно 8, то есть что фигурок при разрезании получается четное число. Это можно делать двумя способами.

Способ 1. Покрасим доску в шахматную клетку 2×2 . Каждый квадрат занимает четное число клеток, а каждый зигзаг — нечетное. Поэтому количество фигурок четно.

Способ 1'. Покрасим доску лесенкой. Каждый квадрат занимает нечетное число клеток, а каждый зигзаг — четное. Поэтому количество фигурок четно.



Слева картинка для способа 1, справа — для 1'.

Способ 2. Заметим, что в каждой строке и в каждом столбце такой фигурки четное число клеток, так как её можно разрезать на квадратики 2×2 .

Разрежем фигурку на косые тетрамино и посмотрим на вертикальные из них. В самой верхней строчке четное число вертикальных косых тетраминошек. Выкинем их. Из каждой строчки и из каждого столбца при этом ушло четное число клеток. Повторим эту операцию последовательно сверху вниз для каждой из строчек. В итоге получим, что вертикальных косых тетраминошек четное число. Аналогично, горизонтальных тетрамино четное число.

7. На доске было написано число 1. Неугомонный Саша каждую минуту получает новое натуральное число, пытаясь вычесть из последнего записанного числа 2^{100} . Если оказывается, что результат уже был записан раньше, или что текущее число меньше, чем 2^{100} , то Саша прибавляет 3^{100} . Появится ли когда-нибудь на доске число 5^{100} ?

РЕШЕНИЕ:

Ответ: Да (как и любое другое натуральное число).

Будем следить за остатком текущего числа от деления на 2^{100} . Если получим число с таким же остатком, что и число 5^{100} , но больше 5^{100} , то и само число 5^{100} нам встретится.

Поскольку если число a встречается в последовательности, то и число $a - 2^{100}$ — тоже (если не встретилось до того, то встретится сразу после него)

С остатком от деления на 2^{100} происходит следующее: он либо не меняется (ограниченное число раз подряд!), либо увеличивается на остаток 3^{100} . Поскольку 2^{100} и 3^{100} взаимно просты, то рано или поздно мы получим все остатки по модулю 2^{100} , в том числе и нужный, причем сколько угодно раз. Рано или поздно получим число с нужным остатком, большее 5^{100} .