5 класс

1. У Маши есть карточки с числами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Одну из них она потеряла, а остальные выложила в виде квадратика 3×3. Маша заметила, что сумма чисел в первой строчке квадрата делится на сумму чисел во второй строчке (и эти суммы не равны), а сумма чисел во второй строчке делится на сумму чисел в третьей (и эти суммы не равны). Нарисуйте, как могли располагаться числа в квадрате.

Решение:
Один из способов показан на рисунке (Маша потеряла карточку с цифрой 6).

7	8	9
3	4	5
0	1	2

2. Вася сложил три различных двузначных слагаемых и понял, что сумма больше третьего слагаемого на 22, а первого — на 24. Найдите эту сумму.

Решение:
Пусть x, y, z — искомые числа. Из условий видим, что $x + y = 22$, $y + z = 24$. Так как числа различны и двузначны, то $x = 10, y = 12$ или наоборот (других вариантов получить в сумме 22 нет). Тогда $z = 12$ (если $y = 12$) или $z = 14$ (при $y = 10$). Первый вариант не подходит, т.к. числа не являются различными. Итак, $z = 14$ и $x + y + z = 36$.

3. На клетчатой плоскости кузнечик отправился в путешествие из своего дома. Он прыгнул на одну клетку, потом на две, повернулся направо, прыгнул на три, затем на четыре клетки, снова повернулся направо и т. д. (после каждых двух прыжков — один поворот направо, каждый следующий прыжок длиннее предыдущего на одну клетку). После тысячного прыжка он ещё раз повернулся (направо или налево), прыгнул, снова повернулся, снова прыгнул и оказался в первоначальной клетке. На сколько клеток он прыгал два последних раза?

Решение:
Посмотрим, что происходит после восьми подряд идущих прыжков. Пусть для определённости первые два прыжка (на x и $x + 1$ клетку) кузнечик сделал влево. Тогда прыжки $x + 2$ и $x + 3$ он совершил вверх, $x + 4$ и $x + 5$ — вправо, и $x + 6$ и $x + 7$ — вниз. Итог этих восьми прыжков — кузнечик сдвинулся на 8 клеток вправо и на 8 вниз, а следующий ход будет снова влево. Таких восьмёрок у кузнечика будет 125; следовательно, ему нужно будет ещё прыгнуть на 1000 влево и на 1000 вниз, чтобы попасть в исходную точку.

4. При игре в «нью-напёрстки» под три стаканчика кладут три разных шарика, а потом стаканчики с шариками как-то меняют местами, чтобы ни один шарик не остался на своём месте. Изначально шарики лежали так: красный, синий, белый. Могут ли они после сотого раунда лежать в обратном порядке?

Решение:
При такой игре вообще возможны только три комбинации: «красный, синий, белый», «синий, белый, красный» и «белый, красный, синий». Любая перестановка, разрешённая по условию задачи, приводит к одной из этих комбинаций. Следовательно, перестановку «белый, синий, красный» получить нельзя ни после сотого раунда, ни после какого-либо ещё.

5. Андрюша написал равенство, а затем заменил в нём цифры буквами: одинаковые цифры — одинаковыми буквами, а разные — разными. У него получилось ЗУХРА $\times$ ХАРОН =

АНАХРОНИЗМ. Он утверждает, что любая цифра, записанная гласной, больше любой цифры, записанной согласной. Мог ли Андрюша нигде не ошибиться?

Решение:

Не мог. Допустим, что ребус удовлетворяет всем условиям. Всего у нас задействованы согласные буквы З, Х, Р, Н, М и гласные буквы У, А, О, И. Следовательно, З <6 и Х <6. Значит, ЗУХРА <60000 и ХАРОН <60000, а тогда ЗУХРА $\times$ ХАРОН <3600000000, откуда $A<4$. Но такого не могло быть, если каждая гласная больше каждой согласной.

Примечание. Компьютерный перебор показывает, что этот ребус вообще не имеет решений.

6. В баре находится 30 человек. Бармену известно, что среди них 10 рыцарей (они всегда говорят правду), 10 лжецов (они всегда лгут) и 10 дебоширов. Бармен может спросить человека X про человека Y: «Правда ли, что Y дебошир?». Если X не дебошир, то он отвечает на вопрос, а если дебошир, то он вышвырнет из бара Y в ответ. Бармен сам может выгнать из бара кого угодно, но его цель — избавиться от дебоширов и оставить в баре как можно больше мирных клиентов. Как ему следует поступать? Не забудьте доказать, что большее количество мирных клиентов он оставить не сможет.

Решение:

Ответ: 19. В самом деле, с первым же вопросом может быть выставлен мирный клиент, поэтому бармен не сможет гарантированно сохранить всех мирных.

Покажем, как бармену оставить 19 мирных клиентов.

Решение 1. Сначала он спрашивает всех про клиента A — до тех пор, пока кто-нибудь его не вышвырнет из бара. Пусть его вышвырнул B (следовательно, он дебошир). Теперь начинаем спрашивать про B, пока B не окажется вышвырнутым, и т. д. В конце мы получим ситуацию, когда дебошира X никто не вышвыривает. Значит, дебоширов больше нет (кроме X). Бармен выгоняет X, и всем становится спокойно. Заметим, что все выгнанные, кроме самого первого, гарантированно являлись дебоширами.

Решение 2. Сначала спрашиваем клиента B про A, затем спрашиваем C про B. За первый вопрос мы получаем информацию, дебошир ли B, за второй узнаём, кем является C — рыцарем, лжецом или дебоширом. Если C не дебошир, то опросим C про всех клиентов и узнаем, кто дебоширы (если C лжец, то его ответы надо трактовать наоборот). Их и надо выгнать.

Если C сам дебошир, то спросим D про C. Либо D ответит, либо и он дебошир (тогда будем спрашивать про D, и т. д.) Когда получим какой-нибудь ответ, действуем, как в предыдущем случае.

7. В квадрате 100×100 провели 10 000 разрезов по линиям сетки (каждый разрез длиной в одну клетку), и он распался на 2500 четырёхклеточных фигурок. Сколько среди них квадратиков 2×2?

Решение:

Ответ: 2300.

Решение. Заметим, что у квадрата 2×2 периметр равен 8, а у остальных четырёхклеточных фигур (прямоугольник 1×4, Т-шка, L-ка или S-ка) — 10. Пусть квадратиков x, остальных фигур $2500-x$. Тогда их суммарный периметр равен $8x+10\cdot(2500-x)=25\,000-2x$. С другой стороны это периметр квадрата плюс удвоенная длина разреза, т. е. 20 400 клеток. Отсюда $2x=25\,000-2\,0400=4600$, и в результате $x=2300$.