5 класс

1. Назовем число несчастливым, если любые две его цифры подряд образуют двузначное число, кратное 13. Сколько существует десятизначных несчастливых чисел?

Решение:

Выпишем все двузначные числа, делящиеся на 13 — это 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91. Заметим, что более чем двузначные числа бывают либо 139139... (эта последовательность может также начинаться с 3 или с 9), либо 265265... (тоже может начинаться с 3 или с 9). Итого 6 вариантов.

2. В двух мешках лежат разные подарки. В мешке Деда Мороза — те подарки, каждый из которых весит от 40 до 50 г, а в мешке Снегурочки — те подарки, каждый из которых весит от 20 до 30 г. К сожалению, Дед Мороз и Снегурочка не запомнили, где чей мешок. У них есть весы, на которых можно взвесить одновременно не более пяти предметов (но не менее одного из каждого мешка), и в результате узнать их точный суммарный вес. Могут ли Дед Мороз и Снегурочка определить свои мешки за одно взвешивание?

Решение:

Могут. Пусть они взвесят четыре подарка из мешка A и подарок из мешка B Если мешок A Снегурочкин, то весы покажут не более $4 \cdot 30 + 50 = 170$ г. А если мешок A принадлежит Деду Морозу, то минимальный вес окажется $4 \cdot 40 + 30 = 190$ г. Так по весам определяется, где чей мешок.

3. В ряд стоят много-много детей. Каждая девочка заметила, что ее порядковый номер в два раза больше количества мальчиков, стоящих до нее. На 2018-м месте оказалась девочка. А кто — мальчик или девочка — оказался на тысячном месте?

Решение:

До 2018-го места стоит 1009 девочек. Заметим, что они все могут стоять только на чётных местах, а значит, все чётные места заняты девочками. Таким образом, на 1000-м месте стоит девочка.

4. Есть несколько карточек. На каждой из них с каждой из двух сторон нарисован кружок: красный, синий или желтый. Среди любых 30 карточек найдется карточка с красным кружком, среди любых 40 карточек найдется желтый кружок, а среди любых 50 найдется синий. Всего есть 20 карточек, на которых нарисованы кружки разного цвета. Докажите, что одноцветных карточек не более 48.

Решение:

Карточек без красных кружков не более 29, карточек без жёлтых — не более 39, без синих — не более 49. Сложим эти все эти числа, получим не более 117. Одноцветные карточки мы при этом сосчитали дважды, двухцветные — один раз. Значит, удвоенное количество одноцветных карточек не более 97, т. е. одноцветных карточек не более 48.

5. На листке бумаги записаны цифры от 1 до 9:

$$1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 9.$$

Между каждыми двумя цифрами необходимо поставить знак $+$ или $\times$ (всего 8 знаков). Вовочка утверждает, что выбрав нужные знаки, он может получить любой результат от 100 до 300. Прав ли он?

Решение:

От 100 до 300 всего 200 чисел. Выбор каждого из 8 знаков делается всего двумя способами — поэтому всего получается не более $2^8 = 256$ возможных результатов (некоторые из них, кроме того, могут оказаться равными).

Однако если два последних знака — действие умножения, то общий результат уже не меньше, чем $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$, поэтому выходит за рамки 300. Следовательно, для последних двух мест есть всего три возможных варианта знаков, а не четыре, а общее число вариантов тогда равно $2^6 \cdot 3 = 192$, что меньше 200. Следовательно, какие-то из чисел от 100 до 300 получить не удастся.

6. 123 рыцаря устроили турнир на выбывание: в каждом поединке участвуют два рыцаря, проигравший выбывает из турнира. По правилам в каждом поединке должны участвовать два рыцаря, которые к началу поединка участвовали суммарно в четном числе поединков. Может ли в результате турнира определиться единственный рыцарь-победитель?

Решение:

Нет, не может. Сосчитаем для каждого момента турнира две вспомогательных величины - $X =$ «количество невыбывших рыцарей, участвовавших в нечетном числе поединков» и $Y =$ «количество невыбывших рыцарей, участвовавших в четном числе поединков». Заметим, что после каждого поединка происходит следующее: либо Y уменьшается на 2, а X увеличивается на 1 (если бьются двое, каждый из которых ранее бился чётное число раз), либо X уменьшается на 2, а Y уменьшается на 1. Таким образом разница между X и Y меняется на 3 в одну или другую сторону. В начале турнира она была равна 120, потому что перед поединками $X = 0$, $Y = 120$. Значит, и в конце турнира она должна делиться на 3. Но если в турнире остался один невыбывший рыцарь, то должно быть либо $X = 1$, $Y = 0$, либо $X = 0$, $Y = 1$. То есть разница при делении на 3 не даёт в остатке 0. Противоречие.

7. Копатыч взял какое-то натуральное число, возвел в 1, 2, 3, 4 и 5 степени. Затем он зашифровал числа, заменив одинаковые цифры на одинаковые буквы, а разные цифры — на разные. Каждое зашифрованное число он написал на отдельной бумажке. Но Нюша оставила от каждой бумажки обрывок, на котором сохранилось только две последние буквы, да и те перемешала. Получилось: ОК, СЁ, ЯЖ, ШИ, ЛИ. Найдите значение выражения

$$\text{Ё} \cdot \text{Ж} \cdot \text{И} \cdot \text{К} - \text{Л} \cdot \text{О} \cdot \text{С} \cdot \text{Я} \cdot \text{Ш}.$$

Решение:

Очевидно, что буквы К, Ё, Ж, И — одной четности, причем среди них нет ни 0, ни 5.

Если К, Ё, Ж, И — чётные, то все степени, кроме первой, должны делиться на 4, а тогда и О, Ш — тоже чётные цифры, что нехорошо.

Последняя цифра числа в первой и в пятой степени одна и та же, поэтому ШИ — последние две цифры первой и пятой степени числа. Но тогда четвёртая степень этого числа оканчивается на 01.

Тогда, с точностью до перестановки сомножителей,

$$\text{Ё} \cdot \text{Ж} \cdot \text{И} \cdot \text{К} - \text{Л} \cdot \text{О} \cdot \text{С} \cdot \text{Я} \cdot \text{Ш} = 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 - 0 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 = 189.$$

Замечание. Пример в этой задаче есть, и не один. Есть 07, 49, 43, 01, 07 и 43, 49, 07, 01, 43. Важно, что мы не можем выяснить, какая буква Ш, а какая О.