Очный тур

4 класс

1. Пять братьев делили наследство отца поровну. В наследстве было три дома. Поскольку дома пилить нельзя, их взяли три старших брата, а меньшим братьям выделили деньги: каждый из трех старших братьев заплатил 2000 долларов. Сколько долларов стоил один дом?

Решение:

Ответ: 5000 долларов.

Поскольку каждый из братьев, получивших деньги, получил по 3 тысячи, то общее наследство было оценено в 15 тысяч долларов. Следовательно, каждый дом стоил треть этой суммы.

2. Заяц набрал мешок яблок. По пути домой он половину мешка отдал медведю, а треть оставшегося — козе. После этого он отдал ежу половину того, что у него осталось. Напоследок он отдал все, кроме одного яблока, кроту. Оказалось, что медведю досталось на 75 яблок больше, чем кроту. Сколько яблок досталось козе?

Решение:

Заметим, что если добавить кроту то яблоко, которое заяц оставил себе, то его доля сравняется с долей ежа, а также и с долей козы. Поэтому доли козы и ежа равны, а вместе они составляют 74 яблока — столько, на сколько теперь у медведя больше, чем у крота. Следовательно, у козы 37 яблок.

3. Саша купил в канцелярском магазине 2 ручки, карандаш и 7 тетрадок — всего ровно на 100 рублей. Его сестра Маша хочет купить ручку, тетрадку и три карандаша. У нее с собой есть много 5-рублевых монет. Обязательно ли она сможет расплатиться ими без сдачи, если каждый товар стоит целое число рублей?

Решение:

Ответ: Да.

Из условия следует, что 6 ручек, 3 карандаша и 21 тетрадка стоят 300 рублей, а значит, 1 ручка, 3 карандаша и 1 тетрадка отличаются от 300 на сумму, кратную 5.

Указание по приёму задачи: если участник даёт только ответ, не подкрепляя его рассуждениями (по модулю 5), то нужно, не ставя минус за подход, сообщить, что в задаче требуется обоснование ответа.

4. В парламенте Изумрудного города представлены 5 партий, которые за год вместе разработали 100 законов (каждый закон разработан ровно одной из партий). Известно, что любые три партии вместе разработали не менее 50 законов. Какое наибольшее число законов могла разработать партия Зелёных Линз?

Решение:

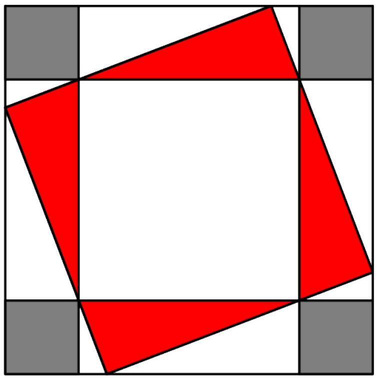
Ответ: 33.

Оценка. Пусть это количество равно x. Поскольку три любых партии вместе разработали не менее 50, то любая из партий вместе с партией Зелёных Линз разработала не более 50. Значит, каждая из четырех остальных партий разработала не более $50 - x$, а все они вместе — не более $200 - 4x$. Тогда получаем, что общее число законов не более $200 - 3x$. Так как общее число законов равно 100, то $3x \leqslant 100$, откуда $x \leqslant 33$.

Пример. 33, 17, 17, 17, 16.

5. Из квадрата со стороной 5 вырезаны 4 угловых единичных квадрата (см. рисунок). Чему равна площадь наибольшего квадрата, который можно вырезать из оставшейся части?

Решение:
Ответ: 15.



На картинке площадь каждого из красных треугольников равна 1.5, потому что она вдвое меньше площади прямоугольника.

6. У любителя взвешиваний имеется 17 внешне неразличимых монет, 15 из которых весят по 2 г, одна — 1 г, и еще одна — 4 г. Как отыскать 4-граммовую монету за 4 взвешивания на двухчашечных весах?

Решение:
Первым взвешиванием отложим какую-нибудь одну монету, остальные разложим по 8 на каждую чашу весов и сравним. Заметим, что равенства во взвешивании быть не может, так как если 1-граммовая монета не отложена, то на одной чаше четный вес, а на другой нечётный. А если отложена — то чаши не равны, потому что только на одной из них есть монета 4 г. Тогда после взвешивания мы точно знаем, что на более легкой чаше нет 4-граммовой монеты. Выкинем все 8 монет с более легкой чаши. У нас остались ровно 9 подозрительных монет, среди которых точно есть 4-граммовая, а 1-граммовой может и не быть.

Вторым взвешиванием отложим одну из оставшихся монет, а остальные разложим на чаши по 4 штуки. Повторим все рассуждения о неравенстве и о невозможности нахождения 4-граммовой монеты на более легкой чаше.

Третьим взвешиванием сделаем то же самое, выкинув еще 2 монеты. После третьего взвешивания у нас остались всего 3 монеты, одна из которых точно весит 4 г. Сравним те две из них, которые были на более тяжелой чаше в предыдущем взвешивании. Если одна из них перевесит, то она и весит 4 г (потому что более тяжелая чаша не могла содержать монеты 1 и 2), а если они равны, то 4 г — третья из оставшихся монет.

7. 120 рыцарей устроили турнир на выбывание: в каждом поединке участвуют два рыцаря, проигравший выбывает из турнира. Согласно правилам, , все поединки проходят по очереди, и в каждом поединке должны участвовать два рыцаря, которые к началу этого поединка участвовали суммарно в четном числе поединков. Может ли в результате турнира определиться единственный рыцарь-победитель?

Решение:

Нет, не может. Сосчитаем для каждого момента турнира две вспомогательных величины - $X =$ «количество невыбывших рыцарей, участвовавших в нечетном числе поединков» и $Y =$ «количество невыбывших рыцарей, участвовавших в четном числе поединков». Заметим, что после каждого поединка происходит следующее: либо Y уменьшается на 2, а X увеличивается на 1 (если бьются двое, каждый из которых ранее бился чётное число раз), либо X уменьшается на 2, а Y уменьшается на 1. Таким образом разница между X и Y меняется на 3 в одну или другую сторону. В начале турнира она была равна 120, потому что перед поединками $X = 0$, $Y = 120$. Значит, и в конце турнира она должна делиться на 3. Но если в турнире остался один невыбывший рыцарь, то должно быть либо $X = 1$, $Y = 0$, либо $X = 0$, $Y = 1$. То есть разница при делении на 3 не даёт в остатке 0. Противоречие.