11 класс

Сюжет 1

У Георгия Константиновича есть сад, по которому иногда пробегает Эрих. Эрих бегает по прямой, но каждый раз по новой. Георгий Константинович хочет закупить и расставить противотанковые ежи (в виде нескольких отрезков внутри или по границе сада) так, чтобы Эрих гарантированно в них уперся. Длиной ежа называется сумма длин составляющих его отрезков.

1. Пусть сад имеет форму правильного треугольника со стороной 1. Докажите, что Георгию Константиновичу хватит ежей суммарной длиной $\sqrt{3}$.

Решение:

Проведем медианы до точки пересечения. Длина каждой из медиан равна $\sqrt{3}/2$, а поскольку медианы делят друг друг в отношении $2:1$, то суммарная длина отрезков медиан до точек пересечения равна $\sqrt{3}$.

2. Пусть сад имеет форму квадрата со стороной 1. Докажите, что Георгию Константиновичу хватит ежей суммарной длиной 2,64.

Решение:

Хватит, например, отметить точку X, разбивающую диагональ AC в отношении $(\sqrt{3}+1) : (\sqrt{3}-1)$ и соединить ее с точками B, C и D (это ёж №1) и соединить точку A с точкой пересечения диагоналей квадрата (это ёж №2). При этом выборе точка X является точкой Торричелли треугольника BCD; хорошо известно, что в ней достигается минимум суммы длин отрезков XB, XC и XD.

3. Пусть сад имеет форму правильного треугольника со стороной 1. Докажите, что Георгию Константиновичу придется купить ежей длиной хотя бы 1,29.

Решение:

Пусть M, N — середины сторон AB, AC нашего правильного треугольника ABC, K — середина MN. Тогда проекции частей ежей, попавших внутрь треугольника AMN на отрезок AK, должны целиком его покрывать — иначе Эрик шмыгнёт перпендикулярно AK через непокрытую точку. Поэтому сумма длин проекций, а тем более — самих этих частей ежей, не меньше, чем $|AK| = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Складывая с кусками ежей, попавшими в два аналогичных треугольника примыкающих к B и C, получаем, что сумма длин ежей не меньше,чем $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, что чуть больше, чем 1,29.

4. Пусть сад имеет форму квадрата со стороной 1. Докажите, что Георгию Константиновичу придется купить ежей длиной более 2.

Решение:

Ясно, что проекции ежей на каждую из диагоналей должны ее полностью покрывать, иначе по перпендикуляру через непокрытую точку может пробежать Эрих. Пусть длины наших отрезков равны a_i, а их углы с одной из диагоналей — ϕ_i. Получаем два неравенства:

$$\sum a_i \cos\phi_i \geqslant \sqrt{2}, \quad \sum a_i \sin\phi_i \geqslant \sqrt{2}.$$

Сложим, оценим сумму $\sin\phi + \cos\phi \leqslant \sqrt{2}$ (например, заметив, что это $\sqrt{2}\cdot\sin(45^\circ+\phi)$), получим что длина ежей **не менее** 2.

Заметим, что если Георгию Константиновичу хватает ежей длиной 2, то в предыдущем абзаце все неравенства обращаются в равенства. Из этого следует, что все отрезки ежей параллельны сторонам квадрата. Рассмотрение прямых, параллельных сторонам, показывает, что суммы длин вертикальных и горизонтальных отрезков ежей равны 1. Из этого следует, что проекции вертикальных отрезков ежей на вертикальную сторону квадрата не могут пересекаться по внутренним точкам.

С другой стороны, каждый угол покрыт каким-то из отрезков, иначе Эрих может пробежать недалеко от угла. Назовем квадрат $ABCD$; мы можем считать, что угол A покрыт отрезком AX ежа, лежащем на стороне AB, и этот отрезок вертикален. Тогда рассмотрим точку E на стороне DC, лежащую ближе к стороне AD, чем точка X и чем любой из горизонтальных отрезков ежей, не лежащих при этом на стороне AD. Заметим, что все траектории Эриха, проходящие через точку E и сторону AD, должны покрываться горизонтальным отрезком ежа, поскольку иначе проекция вертикального покрывающего отрезка на AB пересечет AX. По выбору точки E все такие отрезки ежей должны принадлежать стороне AD, следовательно она представляет из себя отрезок ежа, значит у нас есть ровно один горизонтальный отрезок, и это сторона AD.

Теперь посмотрим на углы B и C, они покрыты вертикальными отрезками, проекции которых на AB пересекаются по внутренним точкам. Противоречие.

Сюжет 2

В магической стране есть несколько школ. Некоторые из них соединены беспосадочными маршрутами совиной почты. Кратчайшим путем между школами называется путь, для которого сове понадобится наименьшее количество перелетов. Страна называется *гармоничной*, если для любых трех различных школ Ю, М и Ш существует единственная школа (называемая *медианой*), принадлежащая одновременно каким-то кратчайшем путям из Ю в М, из М в Ш и из Ю в Ш (она может совпадать с одной из школ Ю, М, Ш).

1. Докажите, что если в стране любые две школы соединяет ровно одна цепочка беспосадочных маршрутов, то эта страна гармонична.

Решение:

Обратим внимание на то, что в дереве любые две вершины соединяет ровно один путь, он и будет кратчайшим.

Возьмем три различные вершины x, y и z. Обозначим вершины на пути из y в x как $y = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = x$, а вершины на пути из y в z, как $y = z_0, z_1, z_2, \dots, z_m = z$.

Выберем максимальное такое k, что $y_k = z_k$. Тогда $y_i \neq z_j$ при $i, j > k$ (при $i = j$ по максимальности, а при $i \neq j$ можно было бы найти цикл). Осталось заметить, что последовательность $x_n, x_{n-1}, \dots, x_k = z_k, z_{k+1}, z_m$ — путь из z в x. И наши три пути пересекаются ровно по одной вершине $x_k = z_k$.

2. Докажите, что если страна является гармоничной, то можно назвать некоторые школы *добрыми*, а остальные *злодейскими* так, чтобы любой беспосадочный маршрут соединял добрую школу со злодейской.

Решение:

Нас просят доказать, что граф двудолен, а это условие (как хорошо известно) эквивалентно четности всех циклов.

Предположим противное, и рассмотрим самый короткий нечетный цикл в графе. Возьмем в качестве x и y две смежные вершины этого цикла, а в качестве z — противоположную им вершину. Ясно, что той самой, единственной вершиной обязана быть либо x, либо y, но ни одна из них не подходит.

3. В стране Гиперляндии 2^n школ, названиями которых являются все возможные последовательности из символов 0 и 1 длины n, при этом между школами есть беспосадочный маршрут тогда и только тогда, когда их названия отличаются ровно в одном символе. Докажите, что Гиперляндия — гармоничная страна.

Решение:

Рассмотрим вершины x, y и z. Ясно, что на медианной вершине реализуется минимум суммы $d(x,m)+d(y,m)+d(z,m)$, поскольку она равна половине $d(x,y)+d(x,z)+d(y,z)$. Теперь заметим, что если мы возьмем в качестве m наиболее частое значение в каждом бите (такое будет, так как три не делится пополам), то это единственный кандидат на эту роль; ясно также, что он подходит.

4. Пусть в гармоничной стране n школ, каждая из которых соединена беспосадочными маршрутами ровно с d другими. Докажите, что $d < 2\sqrt[3]{n}$.

Решение:

Заметим, что если мы подвесим за произвольную вершину v, количество ребер со второго на третий уровень будет $d(d-1)$, поскольку в графе не может быть треугольников. Теперь заметим, что если три таких ребра ведут из вершин u_1, u_2, u_3 в вершину w, то медианами вершин u_1, u_2 и u_3 будут одновременно v и w, поскольку между собой u_1, u_2 и u_3 не соединены. Получается, что на третьем уровне не менее $d(d-1)/2$ вершин (и не более, чем $d(d-1)$). Значит, поскольку у нас нет нечетных циклов, с третьего уровня на четвертый ведет не менее $d(d-1)(d-2)/2$ ребер.

Пусть в какую-то вершину a четвертного уровня ведут 4 ребра из вершин третьего уровня b_1, b_2, b_3, b_4. Тогда для любых вершин b_i, b_j существует общая смежная вершина на втором уровне, иначе свойство графа не выполняется для вершин v, b_i, b_j; — назовем эту вершину b_{ij}. Заметим, что вершины b_{ij} и b_{ik} не могут совпадать, так как иначе для вершин b_i, b_j, b_k обе вершины a, $b_{ij}=b_{ik}$ являются медианными. Но тогда из вершины b_1 есть три соседа b_{12}, b_{13}, b_{14} на втором уровне, что противоречит предыдущему абзацу. Значит, у нас есть хотя бы

$$1+d+\frac{d(d-1)}{2}+\frac{d(d-1)(d-2)}{6}>\frac{d^3}{6}$$

вершин, что дает нам требуемое неравенство.

Сюжет 3 На доске написана четвёрка целых чисел. Разрешается менять написанную на доске четверку (a,b,c,d) на четверку $(f(a),f(b),f(c),f(d))$, где $f(x)=px^3+qx^2+rx+s$ — кубический многочлен с целыми коэффициентами p,q,r,s, произвольное количество раз (при этом можно брать различные f на разных шагах).

1. Можно ли из четверки с числами 2, 4, 5, 7 получить четвёрку чисел 0, 3, 6, 9 в какомнибудь порядке?

Решение:

Если f — многочлен с целыми коэффициентами, то $f(x)-f(y)$ делится на $x-y$ при любых целых x и y. Теперь заметим, что $7-2=5$, а среди чисел 0, 3, 6, 9 нет таких, разность которых делится на 5. (Тут нужно либо применить утверждение выше к многочлену, являющемуся композицией применяемых многочленов, либо просто заметить, что в последовательности $x-y, f(x)-f(y), g(f(x))-g(f(y)), \ldots$, где $f, g, \ldots$ — применяемые четырёхчлены, каждый член делится на предыдущий, а значит и на самую первую разность). Ответ: нет.

2. Можно ли из четверки $(-3,-1,1,3)$ получить $(-3,-1,-3,3)$ (числа именно в таком порядке)?

Решение:

Ответ: нет.

Пусть какая-то последовательность многочленов переводит $(-3,-1,1,3)$ в $(-3,-1,-3,3)$. Несложно видеть, что одного такого кубического многочлена не существует (это можно понять подставив все условия и решив линейную систему уравнений или заметить, что такой многочлен обязан иметь вид $x+a(x+3)(x+1)(x-3)$. Подставляя 1, получаем $1-16a=-3$ и a нецелое).

Предположим (x, y, z, t) — промежуточная четвёрка, $t - x$ должно делиться на 6 (из $(-3, 3)$ получается (x, t)) и быть делителем 6 (из (x, t) получается $(-3, 3)$). Значит $t - x = \pm 6$, не умаляя общности,можно считать $t - x = 6$ (поменять знаки у всей четверки можно всегда). Аналогично, $y - x = \pm 2$, если $y - x = -2$, то $t - y = 8$ — противоречие с тем, что $t - y$ должно быть делителем 4. Поэтому наша четвёрка имеет вид $(x, x+2, x+4, x+6)$ или $(x, x+2, x, x+6)$, т. е. с точностью до прибавления константы совпадает либо с начальной четвёркой, либо с конечной. Противоречие (например, если мы предположим,что имеем дело с кратчайшей последовательностью операций, тогда например в переходе $(-3, -1, 1, 3) \mapsto (x, y, z, t) \mapsto \ldots$ первый переход можно включить в последующие — противоречие с минимальностью).

3. Верно ли, что четверку $(1, 2, 3, 4)$ можно превратить в четверку

$$(1^{9999}, 2^{9999}, 3^{9999}, 4^{9999})$$

применением только лишь квадратных трехчленов (т. е. на каждом шаге $p = 0$)?

Решение:

Нет, нельзя. Посмотрим по модулю 5: $(1, 2, 3, 4)$ должна перейти в $(1, 3, 2, 4)$.

Пусть хотя бы у одного из использованных квадратных трёхчленов (скажем, $ax^2 + bx + c$) старший коэффициент не делится на 5. Перейдем в вычеты по модулю 5, и указанный трехчлен преобразуется к виду $a(x + \frac{b}{2a})^2 + d$, поэтому его применение склеивает две различные пары остатков (с суммой $\frac{b}{a}$) (здесь всюду деление остатков по модулю 5), это значит, что он не может перевести четыре различных остатка в четыре различных, а значит и его композиция со всеми последующими трехчленами тоже не может.

Значит, единственная возможность — если у всех использованных трехчленов, старший коэффициент делится на 5, т.е. по модулю 5 применяется просто линейная функция. Но тогда и их композиция — линейная по модулю 5. Однако $1 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 3,\ 4 \mapsto 4$ — очевидно, не линейная функция.

4. Докажите, что если четвёрку (k, l, m, n) можно получить из четвёрки (a, b, c, d) многократным применением указанных операций, то то же можно сделать и за одну операцию.

Решение:

Попытаемся получить (k, l, m, n) за одну операцию. Нужный результат даст многочлен

$$P(t) = k + \frac{l-k}{b-a}(t-a) + \frac{m - (k + \frac{l-k}{b-a}(m-a))}{(c-a)(c-b)}(t-a)(t-b) + A(t-a)(t-b)(t-c).$$

(это интерполяция по Ньютону — первое слагаемое устанавливает значение k в точке a, второе, сохраняя его, устанавливает значение l в точке b, третье устанавливает значение m в точке $t = c$, не меняя значений при $t = a$ и $t = b$, и, наконец, четвертое устанавливает нужное значение в точке $t = d$). Если все три числа $\frac{l-k}{b-a}$, $\frac{m-(k+\frac{l-k}{b-a}(c-a))}{(c-a)(c-b)}$, A — целые числа, то коэффициенты P целые, а значит (k, l, m, n) достижима из (a, b, c, d) за один ход.

Теперь покажем, что если (k, l, m, n) можно получить из четверки (a, b, c, d) за много операций, то эти числа и вправду целые — отсюда будет следовать нужное утверждение. Действительно, пусть мы получили (k, l, m, n), применяя трехчлены P_1, P_2,… P_i. Тогда результирующая функция $Q(x) = P_i(P_{i-1}(\ldots(P_1(x))\ldots))$ — это тоже многочлен, причём $Q(a) = k$, $Q(b) = l$, $Q(c) = m$, $Q(d) = n$. Тогда число $\frac{Q(b)-Q(a)}{b-a}$ — целое,как уже обсуждалось в предыдущих пунктах. Посмотрим на второе, выражение, приведя его к виду

$$\frac{\frac{m-k}{c-a} - \frac{l-k}{b-a}}{c-b} = \frac{\frac{Q(c)-Q(a)}{c-a} - \frac{Q(b)-Q(a)}{b-a}}{c-b}.$$

То, что это целое число, легко проверяется явным вычислением. Заметим, например (больше для краткости записи), что эту целость достаточно проверять для мономов, т.е для случая $Q(x) = x^k$ (при сложении одночленов интересующие нас дроби будут тоже складываться). Имеем

$$\frac{\frac{c^k-a^k}{c-a} - \frac{b^k-a^k}{b-a}}{c-b} = \frac{c^{k-1} + c^{k-2}a + \dots + a^{k-1} - (b^{k-1} + b^{k-2}a + \dots + a^{k-1})}{c-b} = \frac{c^{k-1} - b^{k-1}}{c-b} + \frac{a(c^{k-2} - b^{k-2})}{c-b} + \dots + \frac{a^{k-2}(c-b)}{c-b}$$

— целое число.

Аналогично показывается, что целым является число A (то есть так называемая третья разделенная разность),

$$\frac{\frac{\frac{Q(d)-Q(a)}{d-a} - \frac{Q(b)-Q(a)}{b-a}}{d-b} - \frac{\frac{Q(c)-Q(a)}{c-a} - \frac{Q(b)-Q(a)}{b-a}}{c-b}}{d-c}.$$