10 класс

Сюжет 1

На доске написана тройка целых чисел. Разрешается менять написанную на доске тройку (a, b, c) на тройку $(f(a), f(b), f(c))$ (где $f(x)$ — квадратный трехчлен с целыми коэффициентами) произвольное количество раз (при этом можно брать различные f на разных шагах).

1. Можно ли из тройки с числами 2, 4, 7 получить тройку чисел 2, 6, 9 в каком-нибудь порядке?

Решение:

Если f — многочлен с целыми коэффициентами, то $f(x) - f(y)$ делится на $x - y$ при любых целых x,y. Теперь заметим, что $7 - 2 = 5$, а среди чисел $2, 6, 9$ нет таких, разность которых делится на 5. (Тут нужно либо применить утверждение выше к многочлену, являющемуся композицией применяемых многочленов, либо просто заметить, что в последовательности $x - y, f(x) - f(y), g(f(x)) - g(f(y)), \ldots$, где $f, g, \ldots$ — применяемые трехчлены, каждый член делится на предыдущий, а значит и на самую первую разность). Ответ: нет.

2. Можно ли из тройки $(1, 4, 7)$ получить $(1, 10, 7)$ (числа именно в таком порядке)?

Решение:

Ответ: нет.

Пусть какая-то последовательность трехчленов переводит $(1, 4, 7)$ в $(1, 10, 7)$. Несложно видеть, что одного такого трехчлена не существует (если этот трехчлен — $ax^2 + bx + c$, то, подставляя мы получаем, например, систему: $a+b+c = 1$, $16a+4b+c = 10$, $49a+7b+c = 7$, откуда, например, $a = -\frac{2}{3}$).

Предположим (x, y, z) — промежуточная тройка. $z - x$ должно делиться на 6 (из $(1, 7)$ получается (x, z)) и быть делителем 6 (из (x, z) получается $(1, 7)$).Значит $z - x = \pm 6$, не умаляя общности, можно считать $z - x = 6$ (поменять знаки у всей тройки можно всегда).

Аналогично, $z-y = \pm 3$, поэтому наша тройка имеет вид $(x, x+3, x+6)$ или $(x, x+9, x+6)$, т. е., с точностью до прибавления константы, совпадает либо с начальной тройкой, либо с конечной. Противоречие (например, если мы предположим,что имеем дело с кратчайшей последовательностью операций, тогда например в переходе $(1, 4, 7) \mapsto (x, x + 3, x + 6) \mapsto \ldots$ первый переход можно включить в последующие — противоречие с минимальностью).

3. Докажите, что если тройку (x, y, z) можно получить из тройки (a, b, c) многократным применением указанных операций, то то же можно сделать и за одну операцию.

Решение:

Попытаемся получить (x, y, z) за одну операцию. Нужный результат даст многочлен

$$P(t) = x + \frac{y - x}{b - a}(t - a) + \frac{z - (x + \frac{y-x}{b-a}(z - a))}{(c - a)(c - b)}(t - a)(t - b)$$

(это интерполяция по Ньютону: первое слагаемое устанавливает значение x в точке a, второе, сохраняя его, устанавливает значение y в точке b, наконец третье устанавливает значение z в точке $t = c$, не меняя значений при $t = a$ и $t = b$). Если оба числа

$$\frac{y - x}{b - a}, \quad \frac{z - (x + \frac{y-x}{b-a}(c - a))}{(c - a)(c - b)}$$

— целые числа, то коэффициенты P целые, а значит (x, y, z) достижим из (a, b, c) за один ход.

Теперь покажем, что если (x, y, z) можно получить из тройки (a, b, c) за много операций,то эти числа и вправду целые — отсюда будет следовать нужное утверждение. Действительно, пусть мы получили (x, y, z), применяя трехчлены $P_1, P_2, \ldots P_n$. Тогда результирующая функция $Q(x) = P_n(P_{n-1}(\ldots(P_1(x))\ldots))$ — это тоже многочлен, причём $Q(a) = x$, $Q(b) = y$, $Q(c) = z$. Тогда число $\frac{Q(b)-Q(a)}{b-a}$ — целое,как уже обсуждалось в предыдущих пунктах. Посмотрим на второе, выражение, приведя его к виду

$$\frac{\frac{z-x}{c-a} - \frac{y-x}{b-a}}{c-b} = \frac{\frac{Q(c)-Q(a)}{c-a} - \frac{Q(b)-Q(a)}{b-a}}{c-b}.$$

То, что это целое число, легко проверяется явным вычислением. Заметим, например (больше для краткости записи), что эту целость достаточно проверять для мономов, т.е для случая $Q(x) = x^k$ (при сложении одночленов интересующие нас дроби будут тоже складываться). Имеем

$$\frac{\frac{c^k-a^k}{c-a} - \frac{b^k-a^k}{b-a}}{c-b} =$$
$$= \frac{c^{k-1} + c^{k-2}a + \cdots + a^{k-1} - (b^{k-1} + b^{k-2}a + \cdots + a^{k-1})}{c-b} =$$
$$= \frac{c^{k-1} - b^{k-1}}{c-b} + \frac{a(c^{k-2} - b^{k-2})}{c-b} + \cdots + \frac{a^{k-2}(c-b)}{c-b}$$

— целое число. **4.** Верно ли, что четверку $(1, 2, 3, 4)$ можно превратить в четверку $(1^{9999}, 2^{9999}, 3^{9999}, 4^{9999})$ применением аналогичных операций над четвёрками?

Решение:

Нет, нельзя. Посмотрим по модулю 5: $(1, 2, 3, 4)$ должна перейти в $(1, 3, 2, 4)$.

Пусть хотя бы у одного из использованных квадратных трёхчленов (скажем, ax^2+bx+c) старший коэффициент не делится на 5. Перейдем в вычеты по модулю 5, и указанный трехчлен преобразуется к виду $a(x + \frac{b}{2a})^2 + d$, поэтому его применение склеивает две различные пары остатков (с суммой $\frac{b}{a}$) (здесь всюду деление остатков по модулю 5), это значит, что он не может перевести четыре различных остатка в четыре различных, а значит и его композиция со всеми последующими трехчленами тоже не может.

Значит, единственная возможность — если у всех использованных трехчленов, старший коэффициент делится на 5, т.е. по модулю 5 применяется просто линейная функция. Но тогда и их композиция — линейная по модулю 5. Однако $1 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 3,\ 4 \mapsto 4$ — очевидно, не линейная функция.

Замечание. Для четвёрок чисел аналог п. 3, как легко видеть, неверен.

Сюжет 2

Шары с номерами от 1 до 800 поровну разложены по N сосудам неизвестным фокуснику образом. Он отдает команды вида «поменяйте шары с номерами i и j», после чего ассистент меняет их, если они и вправду в разных сосудах (иначе ничего не происходит). После нескольких команд фокусник останавливается.

1. Пусть $N = 2$. Докажите, что фокусник гарантированно может добиться того, чтобы в итоге хотя бы один шар оказался не в своём изначальном сосуде.

Решение:

Будем менять местами 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4,...500 и 501. Ясно,что тут встречаются шары из обоих сосудов. Пусть $k, k+1$ — первая пара соседних шаров из разных сосудов. Тогда мы их действительно поменяем, а дальше k меняться ни с кем не будет.

2. Пусть $N = 400$. Докажите,что фокусник может добиться того,чтобы гарантированно более половины шаров лежали не в своём сосуде.

Решение:

Разобьем почти все шары на тройки. В каждой тройке (a, b, c) прикажем поменять сначала a с b,потом b с c. Если все они были в разных сосудах, то все они поменяют сосуд, если два из них были в одном сосуде, то поменяют сосуд два из трёх (например, можно разобрать все три случая). В итоге поменяется сильно больше половины шаров (почти две трети).

3. Пусть $N = 400$. Какое максимально возможное количество шаров не в своём сосуде может гарантировать фокусник?

Решение:

Ответ: 533.

Будем представлять, что внутри сосуды разделены на ячейки и в каждой лежит по шару. Тогда мы можем представлять, что (независимо от нахождения в одном сосуде или в разных) шары i и j просто меняются ячейками по команде (ij). Таким образом, любая последовательность команд осуществляет просто фиксированную перестановку шаров в ячейках. (Отметим, что транспозиции позволяют сделать любую перестановку). Сделаем перестановку типа «куча циклов по 3 и один по 5», тогда в каждом цикле 3 минимум двое поменяют принадлежность,в цикле длины 5 — минимум трое. Итого 533. Больше гарантировать никак нельзя — в цикле длины k мы можем гарантировать максимум $(k + 1)/2 \leqslant \frac{2}{3}k$ смен принадлежностей (цикл может состоять как раз из пар шаров-соседей (стоящих рядом на цикле) $+$, возможно, один непарный шар), а две трети от 800 меньше 534.

4. Пусть $N = 2$. Фокуснику выдали последовательность команд. Он хочет повторить её несколько раз (по своему усмотрению, но не более k раз) так, чтобы после этого гарантированно хотя бы один шар оказался в своём исходном сосуде. При каком наименьшем k это возможно независимо от последовательности выданных команд? Решение:

Заметим, что если какая-то перестановка шаров (соответствующая последовательности команд) допускает изначальный расклад, при котором в результате этой перестановки все поменяли принадлежность, то в каждом цикле этой перестановки шары из первого и второго сосуда чередуются, значит все циклы имеют чётную длину.

При двукратном применении циклической перестановки с четной длиной цикла получается перестановка,состоящая из двух циклов половинной длины. Так как 800 не делится на 64, то длина одного из циклов тоже не делится на 64. Тогда, деля этот цикл на два не более пяти раз (т. е. повторяя не более $2^5 = 32$ раз исходную последовательность команд) мы получим цикл нечетной длины — в этот момент гарантированно хотя бы один шар окажется в родном сосуде. Ясно,что меньше,чем 32 повторениями отделаться нельзя. Например, если исходная перестановка — цикл длины 800, то его l-кратное применение даст кучу циклов длины $\frac{800}{(l,800)}$ — это число при $l < 32$ четно, так что такой набор циклов вполне допускает исходный расклад, который под действием данной перестановки превратится в свою противоположность. Ответ: 32.

Сюжет 3

У Георгия Константиновича есть сад, по которому иногда пробегает Эрих. Эрих бегает по прямой, но каждый раз по новой. Георгий Константинович хочет закупить и расставить противотанковые ежи (в виде нескольких отрезков внутри или по границе сада) так, чтобы Эрих гарантированно в них уперся. Длиной ежа называется сумма длин составляющих его отрезков.

1. Пусть сад имеет форму правильного треугольника со стороной 1. Докажите, что Георгию Константиновичу хватит ежей суммарной длиной $\sqrt{3}$.

Решение:

Проведем медианы до точки пересечения. Длина каждой из медиан равна $\sqrt{3}/2$, а поскольку медианы делят друг друг в отношении $2:1$, то суммарная длина отрезков медиан до точек пересечения равна $\sqrt{3}$.

2. Пусть сад имеет форму квадрата со стороной 1. Докажите, что Георгию Константиновичу хватит ежей суммарной длиной 2,65.

Решение:

Хватит, например, отметить точку X, разбивающую диагональ AC в отношении $3:1$ и соединить ее с точками B, C и D (это ёж №1) и соединить точку A с точкой пересечения диагоналей квадрата (это ёж №2).

3. Пусть сад имеет форму правильного треугольника со стороной 1. Докажите, что Георгию Константиновичу придется купить ежей длиной хотя бы 1,29.

Решение:

Пусть M, N — середины сторон AB, AC нашего правильного треугольника ABC, K — середина MN. Тогда проекции частей ежей, попавших внутрь треугольника AMN на отрезок AK, должны целиком его покрывать — иначе Эрик шмыгнёт перпендикулярно AK через непокрытую точку. Поэтому сумма длин проекций, а тем более — самих этих частей ежей, не меньше, чем $|AK| = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Складывая с кусками ежей, попавшими в два аналогичных треугольника примыкающих к B и C, получаем, что сумма длин ежей не меньше,чем $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, что чуть больше, чем 1,29.

4. Пусть сад имеет форму квадрата со стороной 1. Докажите, что Георгию Константиновичу придется купить ежей длиной более 2.

Решение:

Ясно, что проекции ежей на каждую из диагоналей должны ее полностью покрывать, иначе по перпендикуляру через непокрытую точку может пробежать Эрих. Пусть длины наших отрезков равны a_i, а их углы с одной из диагоналей — ϕ_i. Получаем два неравенства:

$$\sum a_i \cos\phi_i \geqslant \sqrt{2}, \quad \sum a_i \sin\phi_i \geqslant \sqrt{2}.$$

Сложим, оценим сумму $\sin\phi + \cos\phi \leqslant \sqrt{2}$ (например, заметив, что это $\sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ + \phi)$), получим что длина ежей **не менее** 2.

Заметим, что если Георгию Константиновичу хватает ежей длиной 2, то в предыдущем абзаце все неравенства обращаются в равенства. Из этого следует, что все отрезки ежей параллельны сторонам квадрата. Рассмотрение прямых, параллельных сторонам, показывает, что суммы длин вертикальных и горизонтальных отрезков ежей равны 1. Из этого следует, что проекции вертикальных отрезков ежей на вертикальную сторону квадрата не могут пересекаться по внутренним точкам.

С другой стороны, каждый угол покрыт каким-то из отрезков, иначе Эрих может пробежать недалеко от угла. Назовем квадрат $ABCD$; мы можем считать, что угол A покрыт отрезком AX ежа, лежащем на стороне AB, и этот отрезок вертикален. Тогда рассмотрим точку E на стороне DC, лежащую ближе к стороне AD, чем точка X и чем любой из горизонтальных отрезков ежей, не лежащих при этом на стороне AD. Заметим, что все траектории Эриха, проходящие через точку E и сторону AD, должны покрываться горизонтальным отрезком ежа, поскольку иначе проекция вертикального покрывающего отрезка на AB пересечет AX. По выбору точки E все такие отрезки ежей должны принадлежать стороне AD, следовательно она представляет из себя отрезок ежа, значит у нас есть ровно один горизонтальный отрезок, и это сторона AD.

Теперь посмотрим на углы B и C, они покрыты вертикальными отрезками, проекции которых на AB пересекаются по внутренним точкам. Противоречие.