Задачи очного тура 9 класса

Сюжет 1

Во всех пунктах под $f(x)$ подразумевается многочлен с вещественными коэффициентами.

1.1. *Известно, что* $f(f(x)) = x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4$. *Найдите все такие многочлены* $f(x)$.

1.2. *Пусть* $q < 0$, *и пусть* $f(x) = x^2 + px + q$. *Докажите, что полином* $f(f(\dots f(x)\dots))$ *имеет корень.*

1.3. *Докажите, что не существует многочлена* $f(x)$, *такого что*

$$f(f(\dots f(x)\dots)) = x^{243} - 3x^{162} - 4x^{81} + 13$$

(f *применяется более одного раза).*

1.4. *Многочлен $f(x)$ удовлетворяет уравнению*

$$f(f(x))+f(-f(-x))=f(-f(x))+f(f(-x)).$$

Докажите, что $f(-x)=f(x)$.

Сюжет 2

Окружность ω с центром в точке I вписана в треугольник ABC и касается его сторон AB и AC в точках D и E соответственно. Биссектрисы треугольника ADE пересекаются в точке J. Отрезки BJ и CJ пересекают отрезок DE в точках P и Q соответственно.

2.1. *Докажите, что $PJ>PD$.*

2.2. *Известно, что $IJ = DE$. Найдите угол BAC.*

2.3. *Докажите, что периметр треугольника BJC больше периметра четырехугольника $BDEC$.*

2.4. *Пусть M и N — середины DJ и JE. Докажите, что $PM = QN$.*

Сюжет 3

По кругу стоит N фишек черного и белого цветов. За ход можно поменять цвета у любой пары одноцветных фишек стоящих через одну (между ними может стоять фишка любого цвета) или у любой тройки подряд идущих фишек таких, что цвет первой из них (считая по часовой стрелке) отличается от цвета двух других.

3.1. *Пусть $N = 8$. Докажите, что можно добиться того, чтобы осталось не более одной черной фишки.*

3.2. *Пусть* $N = 2018$. *Докажите, что можно получить полностью белую расстановку*

3.3. *Пусть* $N = 15$ *и разрешена только вторая операция. Докажите, что из любой расстановки можно получить менее* 10^4 *других.*

3.4. *Пусть фишек* $N = 1000$ *и ровно одна из них чёрная (снова разрешены обе операции). Можно ли получить расстановку из одних черных фишек?*