Задачи очного тура 10 класса

Сюжет 4

Во всех пунктах под $f(x), g(x), h(x)$ подразумеваются многочлены с вещественными коэффициентами.

4.1. *Пусть* $f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = -x^2 + x + 1$. *Найдите такой непостоянный многочлен* h, *что* $h(f(x)) = h(g(x))$.

4.2. *Докажите, что не существует квадратных трёхчленов* f *и* g, *таких что* $f(g(x)) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$.

4.3. *Пусть* h *— непостоянный многочлен,* $f \neq g$, *и пусть* $h(f(x)) = h(g(x))$. *Докажите, что* $f + g$ *— постоянный многочлен.*

4.4. *Пусть непостоянные различные многочлены f и g с положительными старшими коэффициентами таковы, что*

$$f(f(x)g(x)) + f(g(x)) \cdot g(f(x)) + f(f(x)) \cdot g(g(x)) = \\ = g(f(x)g(x)) + f(f(x)) \cdot f(g(x)) + g(f(x)) \cdot g(g(x)).$$

Докажите, что f и g отличаются только одним коэффициентом.

Сюжет 5

См. сюжет 2 класса 9.

Сюжет 6

Есть две полоски длиной k. В первой самой левой клетке каждой из полосок стоит n фишек. Двое играют в следующую игру: Паша своим ходом сдвигает произвольное множество фишек на одну клетку вправо, а Рома снимает с поля все только что сдвинутые фишки из какой-то из полосок по своему выбору.

6.1. *Пусть $k = 4$, $n = 3$. Всегда ли Паша может добиться того, чтобы одна из фишек дошла до последней клетки?*

6.2. *Пусть* $k = 4$, $n = 100$ *и Паша каждым ходом сдвигает фишки в полоске только из каких-то двух клеток (по одной в каждой полоске). Докажите, что Рома может добиться того, что не более* 50 *фишек (с учетом снятых) попадут в последние клетки своих полосок.*

6.3. *Пусть* $n < 2^{k-3}$. *Докажите, что Рома может сделать так, что ни одна из фишек не дойдёт до конца.*

6.4. *Пусть* $n > k \cdot 2^k$. *Докажите, что Паша может сделать так, что хотя бы одна из фишек дойдёт до конца.*