Задачи очного тура 9 класса

Сюжет 1

Во всех пунктах под $f(x)$ подразумевается многочлен с вещественными коэффициентами.

1.1. *Известно, что* $f(f(x)) = x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4$. *Найдите все такие многочлены* $f(x)$.

Решение. Пусть $f(x) = ax^2+bx+c$. Тогда $f(f(x)) = a^3x^4+2a^2bx^3+\ldots$. Отсюда $a = 1,\ b = 2$. Наконец, посмотрим на коэффициент перед x^2 и определим, что $c = 1$. В самом деле,

$$(x^2 + 2x + 1)^2 + 2(x^2 + 2x + 1) + 1 = x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4.$$

1.2. *Пусть* $q < 0$, *и пусть* $f(x) = x^2+px+q$. *Докажите, что полином* $f(f(\ldots f(x)\ldots))$ *имеет корень.*

Решение. Докажем, что $f(f(\ldots f(x)\ldots))$ (композиция берётся n раз) имеет положительный корень. Будем доказывать индукцией по n. База: $n = 1$. В самом деле, $f(0) = q < 0$, а ветви параболы направлены вверх. Переход: пусть x_0 — положительный корень для $f(f(\ldots f(x)\ldots))$ ($n-1$ композиция), тогда $f(f(\ldots f(x_0)\ldots)) < 0$ (n композиций), т.е. правее x_0 есть корень.

1.3. *Докажите, что не существует многочлена* $f(x)$, *такого что*

$$f(f(\ldots f(x)\ldots)) = x^{243} - 3x^{162} - 4x^{81} + 13$$

(f применяется более одного раза).

Решение (1)**.** Заметим, что $243 = 3^5$, а значит, $f(x)$ является многочленом третьей степени, а композиция применяется 5 раз — других вариантов просто нет. Допустим, что степень f делится на 3, но f содержит одночлены с показателем, не кратным трём. Заметим, что то же самое верно для любого многочлена вида $g(f)$. (Посмотрим на самый старший такой одночлен в f и посмотрим, где такой может возникнуть в $g(f)$). Значит, исходный многочлен f в задаче мог иметь вид только $x^3 - a$, но это тоже не подходит — итерируя его, видим, что при $a \neq 0$ там есть ненулевой коэффициент при x^{n-3} (то есть, для 5-ой итерации — у x^{240}).

Решение (2)**.** Аналогично, сначала поймем все про степень f и количество композиций. Заметим, что $x^{243} - 3x^{162} - 4x^{81} + 13 = (x^{81} - 2)(x^{81} + 2)(x^{81} - 3) + 1$, и у этого многочлена есть три промежутка монотонности (просто сделаем монотонную замену $y = x^{81}$). Но тогда и у $f(x)$ есть три промежутка монотонности, а у $f(f(f(f(f(x)))))$ их будет больше (можно доказать разбором случаев).

1.4. *Многочлен $f(x)$ удовлетворяет уравнению*

$$f(f(x)) + f(-f(-x)) = f(-f(x)) + f(f(-x)).$$

Докажите, что $f(-x) = f(x)$.

Решение. Рассмотрим многочлен $h(x) = f(x) - f(-x)$. Тогда условие переписывается как $f(f(x)) - f(-f(x)) = f(f(-x)) - f(-f(-x))$ или $h(f(x)) = h(f(-x))$. Заметим, что $h(x)$ — нечётный многочлен, т.е. $h(x) = 2a_{2n+1}x^{2n+1} + \dots$, где a_{2n+1} — половина старшего коэффициента h, он же коэффициент f при наибольшей нечётной степени. Рассмотрим два случая.

1) $f(x)$ содержит слагаемое $a_{2k}x^{2k}$ степени старше, чем $2n+1$ (рассмотрим максимальную такую степень). Тогда $h(f(x))$ содержит слагаемое $2(2n+1)a_{2n+1}a_{2k}^{2n}a_{2n+1}x^{4kn+2n+1}$, а $h(f(-x))$ содержит тот же коэффициент, но с противоположным знаком, а значит, такого слагаемого с нечётной степенью нет.

2) $a_{2n+1}x^{2n+1}$ — старшее слагаемое $f(x)$. Но тогда $h(f(x)) = 2a_{2n+1}^{2n+2}x^{2n+1^2} + \dots$, и снова $h(f(-x))$ содержит то же слагаемое с противоположным знаком, а это плохо.

Сюжет 2

Окружность ω с центром в точке I вписана в треугольник ABC и касается его сторон AB и AC в точках D и E соответственно. Биссектрисы треугольника ADE пересекаются в точке J. Отрезки BJ и CJ пересекают отрезок DE в точках P и Q соответственно.

2.1. *Докажите, что $PJ > PD$.*

Решение. Действительно, $\angle PDJ = \angle ADJ > \angle DJP$ (последнее неравенство следует из того, что $\angle ADJ$ — внешний). Против большего угла лежит большая сторона.

2.2. *Известно, что $IJ = DE$. Найдите угол BAC.*

Решение. Ответ $\frac{2\pi}{3}$.

Можно обозначить через X пересечение отрезков DE и IJ и расписать в прямоугольном треугольнике ADI длины $IJ = IX + XJ$ через $DX = DE/2$ и $\varphi = \angle BAC$.

$$\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{4}) + \mathrm{tg}(\frac{\varphi}{2}) = 2,$$

откуда вычислением получаем, что $\cos(\frac{\varphi}{2}) = \frac{1}{2}$.

Нормальное решение говорит, что биссектрисы углов ADE и AED пересекают окружность ω в середине дуги DE. То есть J лежит на ω, $IJ = IE = ID$ (кстати, подсчет углов тоже дает, что, например, треугольник IDJ равнобедренный). В условиях этого пункта треугольник IDE правильный. $\angle DAE = \pi - \angle DIE = \frac{2\pi}{3}$.

2.3. *Докажите, что периметр треугольника BJC больше периметра четырехугольника $BDEC$.*

Решение. В обозначениях предыдущего пункта достаточно доказать, что $BD + DX < BJ$. Однако DX — это высота равнобедренного треугольника DIJ, проведенная к боковой стороне, что равно расстоянию от J до прямой DI, но DB — расстояние от B до той же прямой. Значит $BJ > DX + BD$.

2.4. *Пусть M и N — середины DJ и JE. Докажите, что $PM = QN$.*

Решение. Следует из того, что $PMNQ$ — параллелограмм, что вытекает из того, что MN — средняя линия треугольника JDE и $2PQ = DE$.

Сюжет 3

По кругу стоит N фишек черного и белого цветов. За ход можно поменять цвета у любой пары одноцветных фишек стоящих через одну (между ними может стоять фишка любого цвета) или у любой тройки подряд идущих фишек таких, что цвет первой из них (считая по часовой стрелке) отличается от цвета двух других.

3.1. *Пусть $N = 8$. Докажите, что можно добиться того, чтобы осталось не более одной черной фишки.*

Решение. Покажем, что если черных больше, то их количество можно уменьшить. Это очевидно, если они стоят через одну (делаем первую операцию) или рядом (тогда, если не все фишки черные, находим тройку БЧЧ и делаем вторую операцию). Если черные стоят через две – тоже (превращаем ЧББЧ в БЧЧЧ, а затем в ББЧБ). Если фишек больше одной и между ними больше двух белых, то они стоят ровно через три, тогда превращаем ЧБББЧ в БЧЧБЧ, потом в БЧБББ.

3.2. *Пусть* $N = 2018$. *Докажите, что можно получить полностью белую расстановку*

Решение. Для данной расстановки рассмотрим получаемую из неё расстановку с наименьшим возможным количеством черных клеток. По предыдущему пункту, между любыми двумя черными не менее четырёх белых. Преобразовываем пятёрку ЧББББ: ЧББББ, БЧЧББ, БЧБЧЧ, ББББЧ. Таким образом, любую черную фишку можно сдвинуть на 4 позиции, и если черных фишек больше одной, добиться-таки того, чтобы расстояние между черными было меньше четырех, после чего уменьшим их количество — противоречие.

Если же черная фишка всего одна, например на позиции 1 (пронумеруем позиции против часовой стрелки), применим первую операцию к позициям 2 и 4, после чего начнем сдвигать чёрную фишку на позиции 4 вправо на четыре позиции, как в прошлом абзаце, и пригоним её на позицию 2016. Теперь все чёрные фишки содержатся во фрагменте ЧББЧЧ и мы его преобразуем: ЧББЧЧ,ЧБЧББ, БББББ.

3.3. *Пусть* $N = 15$ *и разрешена только вторая операция. Докажите, что из любой расстановки можно получить менее* 10^4 *других.*

Решение. Покрасим в три цвета позиции; четности количеств черных на всех позициях меняются одновременно. С фиксированным набором четностей ровно 2^{12} расстановок, с фиксированным с точностью до инверсии — $2^{13} < 10000$.

3.4. *Пусть фишек* $N = 1000$ *и ровно одна из них чёрная (снова разрешены обе операции). Можно ли получить расстановку из одних черных фишек?*

Решение. Нельзя. Пусть $a_i = 0$ если на i-ой позиции стоит белая фишка и $a_i = 1$ иначе. Рассмотрим сумму $\sum a_i 2^i$ по модулю 5 — она корректно определена, т.к. остатки по модулю 5 повторяются с периодом 4, а 1000 делится на 4. Первая операция добавляет или вычитает из суммы $2^k + 2^{k+2} = 5 \cdot 2^k = 0$, вторая — $2^k - 2^{k+1} - 2^{k+2} = -5 \cdot 2^k = 0$. Т.е. эта сумма является инвариантом, но для белой растановки она равна нулю, а для расстановки с одной черной — не равна.