Задачи очного тура 8 класса

1. *Найдите все последовательности с натуральными неповторяющимися членами, для которых a_n делится на a_{a_n} при всех n .*

Решение. Только $a_n = n$, т.к., если существует $k \neq a(k)$, получаем бесконечную убывающую последовательность итераций $a(k), a(a(k)).$, что невозможно.

2. *Турнир по игре «Камень, ножницы, бумага»*[3] *проводится по олимпийской системе,*[4] *на него заявилось 16 игроков. Организаторы определили, кто с кем играет первый матч, победители каких матчей играют друг с другом в следующем и т. д. Каждый из участников собирается во всех играх выкидывать одно и то же, а что именно — выбирает перед самой первой игрой случайным образом. Сколько у игроков есть вариантов сделать выбор так, чтобы турнир закончился?*

Решение. Разберем общий случай с 2^n игроками. Чтобы однозначно нарисовать сетку турнира нам достаточно знать фигуру победителя турнира и кто — правый или левый игрок — выиграл в каждом из $2^n - 1$ матчей. Действительно, тогда однозначно определяются фигуры выигравших левый и правый полуфинальные матчи, из этих фигур — фигуры выигравших четвертьфинальные матчи и т. д. вплоть до исходной расстановки.

Осталось заметить, что разные наборы данных очевидно приводят к разным сеткам, поэтому ответ $3 \cdot 2^{2^n - 1}$. В нашем конкретном случае — $3 \cdot 2^{15}$

3. *Прямая пересекает стороны AB и BC квадрата $ABCD$ в точках X и Y, а продолжения сторон AD и CD — в точках Z и T. Докажите, что треугольники CXZ и AYT имеют одинаковую площадь.*

Решение. Заметим, что угол ZXA равен углу YTC, как односторонние углы при параллельных AB и CD и секущей ZT. Значит, прямоугольный треугольник ZXA подобен прямоугольному треугольнику YTC по

[3] В раунде игры «Камень, ножницы, бумага» участвуют два игрока, которые одновременно показывают одну из трёх фигур (камень, ножницы или бумагу). Если выбраны разные фигуры, то камень обыгрывает ножницы, ножницы обыгрывают бумагу, бумага обыгрывает камень. Если фигуры совпали, то раунд переигрывается.

[4] Турнир по олимпийской системе происходит так: 2^n игроков разбиваются на пары, в каждой паре происходит матч, и проигравший выбывает. Оставшиеся игроки снова разбиваются на пары, каждая пара играет по одному матчу, проигравшие выбывают. И так далее, пока не останется один победитель.

острому углу. Пусть $\frac{ZX}{YT} = k$. Тогда если AH - высота треугольника AZX, а CG - высота треугольника YTC, то $\frac{AH}{CG} = k$. Но площадь треугольника AYT равняется $\frac{YT \cdot AH}{2} = \frac{\frac{ZX}{k} \cdot CG \cdot k}{2} = \frac{ZX \cdot CG}{2}$, что, в свою очередь, равняется площади треугольника CXZ, что и требовалось доказать.

4. *Костя выбрал* 15 *чисел от* 1 *до* 30*, и для каждого из них нашел значение выражения* $f(x) = 1/(x^2+1)$*. Андрей сделал то же самое для остальных* 15 *чисел. Может ли сумма значений, найденных Костей, быть равна сумме значений, найденных Андреем?*

Решение. Заметим, что все знаменатели либо нечетные, либо удвоенные нечетные. Докажем, что у одного из мальчиков знаменатель дроби, полученный после сокращения, будет чётным, а у другого - нечётным. Действительно, среди чисел от 1 до 30 ровно 15 нечётных. Поэтому одному мальчику досталось чётное число из них, а другому - нечетное. У того, кому досталось чётное число нечётных чисел, получилось чётное кол-во слагаемых $1/(4d+2)$, и в итоге двойка в знаменателе сократилась с числителем. У другого - нечётное количество таких слагаемых, поэтому числитель их суммы нечётен.

5. *В кружке занимается* 21 *человек. Известно, что два кружковца дружат, если их фамилии содержат различное количество букв, иначе не дружат. При этом у каждого кружковца друзей в кружке столько же, сколько букв в фамилии. Всего в кружке* 175 *пар друзей. Определите длины фамилий кружковцев.*

Решение. Разобьем кружок на группы по количеству букв в фамилии. Пусть k — количество групп. Каждый дружит с кружковцами из остальных групп. Т. е. если в группе X человек, то у каждого из этой группы $21 - X$ друзей. Отсюда следует, что в группах разное количество человек. Ведь если у двух кружковцев одинаковое число друзей, то у них одинаковое количество букв в фамилии, а тогда они из одной группы. Обозначим A,B,C,… — количества кружковцев в группах. Тогда удвоенное количество пар друзей равняется $A(21-A) + B(21-B) + \ldots = 441 - A^2 - B^2 - \ldots = 350$, следовательно $A^2 + B^2 + \ldots = 91$. Путь $k = 6$. Заметим, что минимальный набор кружковцев по группам даёт как раз $21 = 1+2+3+4+5+6$, причем $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2 = 1+4+9+16+25+36 = 91$. Отсюда следует, что $k \leqslant 6$, причём при $k = 6$ такой набор единственный. Пусть $k \leqslant 5$. Заметим, что среди A, B,

C, D, E (некоторые из них могут быть нулями) должно быть хотя бы одно число, больше 6 (иначе сумма будет меньше 21). Кроме того, таких чисел не более одного, т.к. $7^2 + 8^2 > 91$. Обозначим такое число за Y. Получается, что для сохранения суммы мы должны заменить несколько слагаемых в $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ на Y. Но тогда сумма квадратов окажется больше 91 (т.к. квадрат суммы положительных чисел больше суммы квадратов). Противоречие. Ответ: длины фамилий — 15 (6 шт), 16 (5 шт), 17 (4 шт), 18 (3 шт), 19 (2 шт), 20 (1 шт).

6. *Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Угол BAC равняется 37 градусам. X — точка пересечения высоты из вершины A с прямой, проходящей через B параллельно основанию, M — точка на прямой AC такая, что $BM = MX$. Найдите градусную меру угла MXB.*

Решение. Проведем через точку X прямую, параллельную BC. Обозначим точку пересечения этой прямой и прямой AC за Y. Заметим, что т.к AX была перпендикулярна BC, она будет перпендикулярна и XY. Заметим также, что $CBXY$ — параллелограмм, так как противоположные его стороны попарно параллельны. Из этого следует, что $XY = AB$, как противоположные стороны параллелограмма. Значит, $AXBY$ — равнобокая трапеция, диагональ XY которой перпендикулярна боковой стороне. Значит, центр ее описанной окружности O лежит на основании AY, которое является диаметром O . Так как точка M лежит на диаметре и равноудалена от точек окружности B и X,она является центром этой окружности, в частности, $AM{=}BM$, как радиусы O. Значит, треугольник BMA — равнобедренный с основанием AB, и, следовательно, $\angle BMA = 180^\circ - 2 \cdot \angle BAM = 180^\circ - 2 \cdot 37^\circ = 106^\circ$. Заметим, что $\angle MBX = 180^\circ - \angle BMA = 74^\circ$, так как эти углы – односторонние при секущей BM и параллельных AM и BX. Осталось отметить, что $\angle MXB = \angle MBX$, как углы у основания равнобедренного треугольника MXB, чтобы получить ответ: градусная мера угла MXB равняется 74 градусам.

7. *Натуральные числа a, b, c, d, e и $f < a$ таковы, что $abd + 1$ делится на c, $ace + 1$ делится на b, $bcf + 1$ делится на a. Докажите, что если $d/c < 1 - e/b$, то $d/c < 1 - f/a$.*

Решение. Рассмотрим выражение $abd + ace + bcf + 1$. Очевидно, оно делится на a, b и c, а значит и на abc, поскольку a, b и c попарно взаимно просты.

Домножив неравенство $d/c < 1 - e/b$ на bc и перенеся слагаемые, получим $bc > bd + ce$. Значит $abc \geqslant abd + ace + 1$. Также $abc > bcf$, поскольку $a > f$. Таким образом, $abd+ace+bcf+1 < 2abc$, следовательно $abd + ace + bcf + 1 = abc$. Значит $abc > abd + bcf$, то есть $ac > ad + cf$, что после деления на ac дает $1 > d/c + f/a$, что и требовалось доказать.