Задачи очного тура 7 класса

Решения задач 7 класса. Довывод

1. См. задачу 1 6 класса.

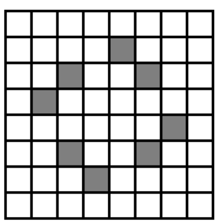
2. *В фирме работают несколько сотрудников с суммарной месячной зарплатой* 10 000 *долларов. Добрый менеджер предлагает всем, у кого зарплата до* 500 *долларов, утроить её, а остальным повысить на* 1000 *долларов, тогда суммарная зарплата станет равной* 24 000 *долларам. Злой менеджер предлагает всем, у кого зарплата больше* 500 *долларов, снизить до* 500, *а остальным оставить как есть. Какой станет суммарная зарплата в этом случае?*

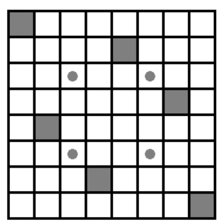
Решение. Заметим, что прибавка, предлагаемая добрым менеджером, вдвое больше, чем величина зарплаты, предлагаемая злым менеджером (это верно и для бедных сотрудников, и для богатых). Прибавка по предложению доброго менеджера равна 14 000, значит, зарплата по предложению злого менеджера — 7000.

3. *Из шахматной доски вырезали* 8 *клеток. Для какого наибольшего* n *из оставшейся части гарантированно можно вырезать прямоугольник площадью* n*?*

Решение. Ответ: для $n = 8$.

Пример, когда прямоугольников с площадью больше 8 нет, приведён на первом рисунке.





Оценка. Пусть из доски нельзя вырезать прямоугольник площадью 8 клеток. Тогда в каждой горизонтали и в каждой вертикали должна быть вырезанная клетка (ясно, что ровно одна).

Рассмотрим левую вертикаль. Если вырезанная из неё клетка не угловая, то в обеих соседних с ней строках вырезанные клетки должны быть в пятой вертикали (иначе появляется пустой прямоугольник 2×4), а это невозможно. Значит, клетка в первой вертикали — угловая, а в соседней с ней строке клетка вырезана из пятой вертикали. Применяя аналогичные соображения со всех остальных сторон, определяем расположение 6 из 8 вырезанных клеток (см. рисунок). После этого очевидно, что «центральные» прямоугольники 2×4 остаются нетронутыми.

4. *Проводится турнир по олимпийской системе*[1] *в игру «Камень, ножницы, бумага»,*[2] *на него заявились* 1024 *игрока. Известно, что* 300 *иг-*

[1] Турнир по олимпийской системе происходит так: 2^n игроков разбиваются на пары, в каждой паре происходит матч, и проигравший выбывает. Оставшиеся игроки снова разбиваются на пары, каждая пара играет по одному матчу, проигравшие выбывают. И так далее, пока не останется один победитель.

[2] В раунде игры «Камень, ножницы, бумага» участвуют два игрока, которые одновременно показывают одну из трёх фигур (камень, ножницы или бумагу). Если выбраны разные фигуры, то камень обыгрывает ножницы, ножницы обыгрывают бумагу, бумага обыгрывает камень. Если фигуры совпали, то раунд переигрывается.

роков будут каждым ходом выбрасывать камень, ещё 400 — *ножницы, а остальные* 324 — *бумагу. Докажите, что турнир никогда не закончится.*

Решение. Предположим, что выиграл игрок, который всё время ставил камень. Тогда в финальном матче он играл против ножниц. В полуфинальных матчах камень должен был играть против ножниц, а ножницы — против бумаги, и т. д. Таким образом можно для всего «турнирного дерева» определить, кто что ставил.

На нулевом уровне дерева 1 камень, на первом — 1 камень и 1 ножницы, на 2-м — 1 камень, двое ножниц и 1 бумага... Заметим, что если на i-м уровне количество разных фигур равно k, n, b, то на $i+1$-м их должно быть $k' = k + b$, $n' = n + k$, $b' = b + n$ (каждый камень порождён камнем и ножницами, ножницы — ножницами и бумагой, бумага — бумагой и камнем).

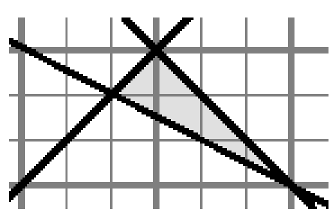
Утверждается, что на каждом уровне два из чисел k и b равны, а третье отличается от них на 1 (это легко доказать по индукции). Поэтому, чтобы турнир окончился победой камня, изначальное количество равных фигур должно различаться не более чем на 1.

Но то же верно и для случая, если выиграет бумага или ножницы. Поскольку числа 400, 300 и 324 различаются более чем на 1, то турнир не может закончиться.

Решения задач 7 класса. Вывод

5. *На тетрадном листе разрешено проводить прямые, проходящие хотя бы через два узла сетки, но не совпадающие с линиями сетки. Можно ли провести три прямые так, чтобы они ограничивали треугольник площадью* 1/3 *клетки?*

Решение. Можно, см. рисунок (на рисунке каждая «исходная» клетка разбита на 9 более мелких клеток). Площадь треугольника можно найти, вычитая из площади прямоугольника площадь всего остального.



6. *В кучке лежит* 2017 *камней. На i-м ходу какую-то из имеющихся кучек разбивают на две непустых кучки, после чего в одну из них добавляют i камней. Может ли оказаться так, что после двух или более ходов во всех кучках окажется поровну камней?*

Решение. После i-го хода получится n кучек, в которых суммарно $2017 + 1 + 2 + \ldots + i = 2017 + \frac{i(i+1)}{2}$ камней.

При чётном i сумма $i(i+1)/2$ делится на $i+1$, а значит, и 2017 должно делиться на $i+1$. Но 2017 простое, так что это возможно только при $i = 2016$. Но тогда суммарное количество камней равно $2017 \cdot 1009$, то есть в каждой кучке 1009 камней. Однако последним ходом в кучку добавлено 2016 камней, поэтому в одной из кучек более 1009 камней.

При нечётном i количество камней должно быть кратно целому числу $(i+1)/2$, для этого 2017 должно делиться на $(i+1)/2$, то есть 4034 делиться на $i+1$. Поскольку i нечётное и больше 1, то должно быть $i = 4033$. Теперь общее количество камней $2017 + 4033 \cdot 4034/2 = 2017 \cdot 4034$, то есть в каждой кучке по 2017 камней. Это вновь противоречит тому, что последним ходом добавили 4033 камня.

7. *Докажите, что у клетчатого многоугольника с площадью* 300 *и периметром* 300 *есть сторона длиной больше* 1. *(Многоугольник не содержит дырок, то есть его граница — замкнутая ломаная без самопересечений.)*

Решение. Посчитаем количество отрезков сетки, расположенных внутри фигуры. Заметим, что у каждой клетки 4 стороны, поэтому учетверённое число клеток равно удвоенному количеству внутренних отрезков плюс периметру фигуры (если посчитать по 4 стороны у каждой клетки, то внутренние отрезки посчитаны дважды, а отрезки периметра — один раз). Поскольку $S = 300$, $P = 300$, то число внутренних отрезков равно $(4S - P)/2 = 450$.

С другой стороны, заметим, что все клетки, расположенные на границе фигуры, одного цвета при шахматной раскраске. Действительно, путь какие-то две соседние (в порядке обхода границы) клетки имеют разный цвет, тогда они могут быть только соседними по стороне, но тогда граница содержит отрезок длины 2. Допустим, что все граничные клетки чёрные, тогда все белые клетки фигуры являются внутренними. Значит, количество внутренних единичных отрезков фигуры в 4 раза больше, чем число её белых клеток, то есть делится на 4. Противоречие.