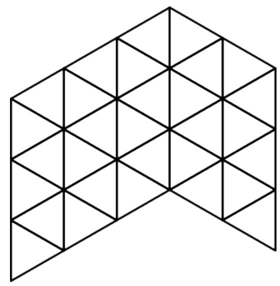
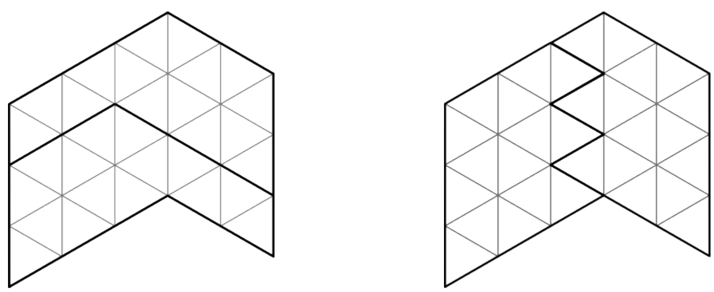
Задачи заочного тура 6 класса

1. *Покажите, как разрезать фигуру по линиям на две равные части. (Части должны совпадать не только по количеству треугольников, но и по форме.)* 7



Решение. Существует два возможных решения (достаточно было привести хотя бы одно):



2. *На проводе сидят* 1000 *ворон. В конце каждой минуты каждая третья (третья, шестая, девятая и так далее) ворона улетает.*
а) Какими изначально по счету были вороны, которые останутся на проводе в конце концов?
б) Сколько минут пройдет до момента, когда вороны перестанут улетать?

Решение. а) Ясно, что в конце останется не более двух ворон, а первая и вторая никогда не улетают. Значит, это будут именно они. Ответ: 1 и 2.

б) Легко видеть, что количество улетающих в очередную минуту ворон — треть их числа, округляемая вниз. Таким образом, остается всего лишь аккуратно посчитать:

минута	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
было ворон в начале	1000	667	445	297	198	132	88	59
улетит в конце	333	222	128	99	66	44	29	19

минута	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**
было ворон в начале	40	27	18	12	8	6	4	3	2
улетит в конце	13	9	6	4	2	2	1	1	0

Видим, что вороны перестали улетать на 17 минуте, таким образом получаем ответ: 16 минут.

3. *Назовем число, состоящее из одинаковых цифр,* красивым. *Любое ли пятизначное число можно представить в виде суммы красивых чисел попарно разной длины?*

Ответ: нет.

Решение (1)**.** Если в требуемой сумме есть число с хотя бы пятью знаками, то результат не меньше 11 111. Иначе он не больше $9+99+999+9999=11\,106$. Таким образом, ни одно из чисел от 11 107 до 11 110 так представить нельзя.

Решение (2)**.** Нужное представление пятизначного числа всегда имеет вид

$$a\cdot 11111+b\cdot 1111+c\cdot 111+d\cdot 11+e,$$

где $0\leqslant a,b,c,d,e\leqslant 9$. Посчитаем, сколько есть различных подходящих представлений.

При $a=0$ должно быть $b=9$, иначе сумма не превышает $8888+999+99+9=9995<10\,000$. В таком случае выходит не более 1000 представлений. При $a=9$ должно быть $b=c=d=e=0$, иначе сумма будет шестизначна. В таком случае получается только одно представление. При всех остальных восьми вариантах для a имеется не более 10 000 различных представлений. Суммарно же их не более 81 001, что меньше количества пятизначных чисел (которых 90 000)

4. *У костра по кругу сидят семеро туземцев из нескольких племен. Каждый говорит своему соседу слева: «Среди остальных пятерых нет моих соплеменников». Известно, что туземцы лгут чужим и говорят правду своим. Представители скольких племен собрались у костра?*

Решение. Если есть хотя бы 4 туземца из одного племени, то двое из них сидят рядом, тогда один из них солжет другому, хотя должен сказать правду. Если из какого-то племени лишь один туземец, то он говорит правду левому соседу, хотя должен врать. Значит, каждое племя имеет двух или трех представителей.

Тогда при двух племенах туземцев не более $3+3<7$, при четырех — не менее $2+2+2+2>7$, то есть племен ровно три.

5. См. задачу 7 для 4 класса.

6. *Вася и Петя загадали два различных числа, и у каждого из них оказалось столько же простых делителей, сколько и составных. Могут ли числа Васи и Пети иметь общие делители, большие 1?*

Решение. Пусть число n содержит более двух простых делителей с учетом кратности. Тогда для каждого простого p, делящего n, число n/p — составное (и все эти числа различны). Также n делит само себя, а тогда составных делителей больше, чем простых. Значит, простых множителей не более двух. Легко видеть, что один быть тоже не может, а тогда их два, т. е. $n = pq$, где p, q простые. Но составной делитель тут только один: pq. Значит, $p = q$, то есть $n = p^2$. Очевидно, любые два различных числа такого вида общих делителей (кроме 1) не имеют, то есть ответ — нет.

7. *В углах квадратного двора стоят четыре дома, в которых живут хулиганы, дружащие между собой. Начиная с* 1 *января* 2017 *года каждый день навсегда ссорились какие-то два хулигана из соседних домов, а* 1 *января* 2018 *года впервые оказалось, что ссориться больше некому. Сколько могло быть всего хулиганов? Приведите все варианты и объясните, почему нет других.*

Решение. Разделим хулиганов на две группировки: в каждую будут объединены хулиганы из противоположных домов. Пусть в одной X хулиганов, а в другой Y. Чтобы все, кто нужно, рассорились, требуется $X \cdot Y$ ссор, и это равно 365. Это число имеет лишь два простых множителя: 5 и 73. Тогда разложений в произведение двух чисел у 365 ровно два:

$$365 = 73 \cdot 5, \quad 365 = 365 \cdot 1,$$

получаем ответ: хулиганов было либо $73 + 5 = 78$, либо $365 + 1 = 366$.