Задачи очного тура 6 класса

1. *В шести кружочках расставлены целые числа так, что суммы вдоль всех проведённых на рисунке прямых равны. Докажите, что сумма всех чисел делится на 9.*

Решение. Ясно, что в центральном треугольнике числа равны и равны удвоенным числам в вершинах большого. Тогда сумма двух разных чисел кратна 3, а так как каждое повторяется трижды, то сумма всех кратна $3 \cdot 3 = 9$.

2. *Старуха Шапокляк раздала шестерым хулиганам разные цифры. В первый раунд хулиган прописывает другому щелбан, если у него четная цифра, а у другого нечетная. Во второй — если у него цифра без дырки, а у другого с дыркой. Всего было получено 8 щелбанов. Какие цифры были розданы? (Шапокляк пишет цифры как показано на рисунке.)*

Решение. Если в обоих раундах были розданы щелбаны, то их уже хотя бы 10. Так как в первом щелбаны обязательно были, то не было во втором, а тогда единственный вариант — 1, 2, 3, 4, 5, 7.

3. *Год назад Белоснежке было столько же лет, сколько в сумме семи гномам. Через два года ей будет столько лет, сколько шести старшим из них. Сколько лет сейчас самому младшему гному?*

Решение. По условию прибавка в три года Белоснежке — это прибавка по три года к шести гномам минус возраст младшего год назад. Значит, младшему год назад было $6 \cdot 3 - 3 = 15$ лет, а сейчас — 16.

4. *В равенстве заменили цифры буквами: одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные — разными. Получилось*

$$У! \cdot Р! \cdot А! = КРОСС.$$

Как могло выглядеть исходное равенство? Найдите все варианты и докажите, что нет других.

$N!$ означает произведение чисел от 1 до N, при этом $0! = 1$ по определению.

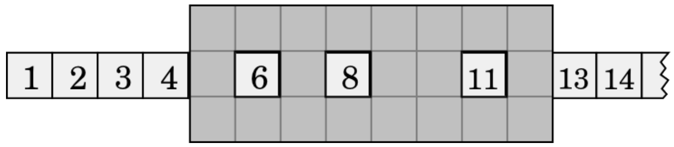
Решение. Если С не 0, то левая часть не превосходит $24 \cdot 6 \cdot 2 < 10\,000$.

Тогда С $= 0$, значит слева есть две цифры не меньше 5. То есть левая часть не меньше $1! \cdot 5! \cdot 6!$, а больше быть не может в силу пятизначности. Получается единственное (с точностью до перестановки У и А и замены $0! = 1!$) решение.

5. *У Васисуалия Лоханкина есть* 8 *одинаковых кубиков. Инженер Птибурдуков взял кубик и написал на его гранях все числа от* 1 *до* 6*, по одному числу на грань; затем сделал то же самое с остальными кубиками. Обязательно ли Васисуалий теперь сможет сложить из этих кубиков куб* $2 \times 2 \times 2$ *так, что сумма видимых чисел будет равна* 80*?*

Решение. Нет. Пусть на каждом написано 1 напротив 4, 2 напротив 5 и 3 напротив 6. Тогда в каждой вершине сходятся грани с разными остатками от деления на 3, то есть сумма видимых чисел на одном кубике всегда кратна 3. Значит и вся сумма видимых чисел делится на 3.

6. *В клетки бесконечно длинной ленты записаны по порядку натуральные числа. Васисуалий Лоханкин и инженер Птибурдуков достали по картонному прямоугольнику, размеченному на клетки такого же размера. Каждый вырезал в своем прямоугольнике несколько клеток, находящихся в одном ряду. При этом Васисуалий вырезал на одну дырку больше, чем Птибурдуков. Теперь они хотят положить свои фигурки на ленту, чтобы вырезанные клетки наложились на клетки ленты. Докажите, что это можно сделать так, чтобы сумма чисел, видимых через дырки одной фигурки, совпала с суммой чисел, видимых через дырки другой.*



Решение. Положим как-нибудь, чтобы сумма у Птибурдукова была больше суммы у Васисуалия (например так, чтобы одно из чисел видимых у Птибурдукова было больше суммы всех видимых у Васисуалия). Теперь будем двигать обе фигуры на клетку вправо, разность от этого будет уменьшаться на 1, ну и когда-нибудь станет нулем.

7. *На столе лежат несколько кучек, в них поровну камней. Васисуалий Лоханкин и инженер Птибурдуков играют в следующую игру. За ход нужно переложить несколько камней (но не все) из одной кучки в другую, но надо переложить больше, чем на предыдущем ходу (а в первый ход можно сколько угодно). Тот, кто не смог походить, считается проигравшим. Первым выпало ходить Васисуалию. Докажите, что Птибурдуков может выиграть, как бы ни играл его соперник.*

Решение. Очевидно, что когда номер хода превысит общее число камней, игра закончится, т. е. ничьи не бывает.

После хода первого игрока будет ситуация «$n-x$, $n+x$, n, $\ldots$, n» Если теперь есть выигрышный ход в $2x+1$ и более камня, то второй его делает. Иначе он перекладывает $2x$ камней из $n+x$ в $n-x$ и по сделанному предположению первый вынужден проиграть.