

Задачи заочного тура 5 класса

1. Константин произнёс названия всех натуральных чисел от 180 до 220 включительно, а Михаил — от 191 до 231 включительно. Кто больше произнёс слов и на сколько?

Решение. Уберем встречающиеся у обоих числа: 191–220. Тогда у каждого останется по 11 чисел: у Константина 180–190, у Михаила 221–231. Заметим, что в названиях чисел 181–189, 221–229 и 231 по три слова, а в 180, 190 и 230 — по два. Получается, что Михаил произнес на одно слово больше.

2. В ряд стоят числа от 1 до 9. Известно, что любые два числа, стоящие через одно, различаются на 1. Может ли число 4 быть крайним в этом ряду?

Решение. Заметим, что через одно место от 1 может стоять только 2. Значит, число 1 либо крайнее, либо соседнее с крайним. Начнем считать места с этого края. Если 1 стоит на первом месте, то 2 стоит на третьем, на пятом может быть только 3, а 4 оказывается на седьмом месте. Если 1 стоит на втором месте, то 2 стоит на четвертом, на шестом может быть только 3, а 4 оказывается на восьмом месте. В обоих случаях 4 не стоит с краю.

3. Из доски 6×6 вырезали угловые квадраты 2×2 . Расставьте на оставшихся полях по два коня каждого из 10 цветов так, чтобы в каждой клетке стоял ровно один конь и одноцветные кони были друг друга.

Решение. Пример подходящей расстановки показан на рисунке.

		1	2			
		8	9			
8	9	7	1	2	3	
7	6	5	3	10	4	
		10	4			
		6	5			

4. Девочка стоит на первом этаже 24-этажного дома, на 13-м, 16-м и 24-м этажах которого живут её подружки. Лестницы в доме нет, но есть лифт, который умеет перемещаться только на 7 или на 10 этажей вверх или вниз. Может ли девочка посетить всех подружек, совершив не более 10 переездов на лифте?

Решение. Да, может. Например, так: $1 - 11 - 21 - 14 - 24 - 17 - 10 - 20 - 13 - 6 - 16$.

5. На фестиваль «Хоббиты — за культурное разнообразие!» прибыло более 20 участников. Корреспондент обнаружил, что среди любых 15 участников фестиваля найдётся не менее 4 людей и не менее 5 эльфов. Сколько хоббитов приняло участие в фестивале? Укажите все возможные ответы и докажете, что других нет.

Решение. Предположим, что есть хотя бы один хоббит. Если среди участников наберется 10 людей, то в их компании с хоббитом и еще 4 любыми участниками не найдется 5 эльфов, что противоречит условию. Значит, людей не более 9. Поскольку всего участников более 20, то найдутся 12 участников, не являющихся людьми. Но тогда, добавив к ним 3 участников, получим компанию, противоречащую условию. А это означает, что хоббитов не было вовсе.

6. Чебурашка на свои деньги купил в магазине у девочки Гали столько же зеркал, сколько Гена — в магазине у Шапокляк. Если бы Гена покупал у Гали, у него было бы 27 зеркал, а если бы Чебурашка покупал у Шапокляк, у него было бы 3 зеркала. Сколько зеркал купили бы Гена

и Чебурашка вместе, если бы Галя и Шапокляк договорились и установили цену на зеркала, равную среднему их нынешних цен? (Средним двух чисел называется половина их суммы, например, для чисел 22 и 28 среднее равно 25.)

Решение. Пусть у Гены в x раз больше денег, чем у Чебурашки. Поменяем деньги Гены и Чебурашки местами. Тогда при втором способе покупки количество зеркал должно стать равным. Следовательно, $3x = \frac{27}{x}$, откуда $3x^2 = 27$, и $x = 3$. Поэтому у Гены изначально денег было в три раза больше, чем у Чебурашки, а цена у Шапокляк в три раза выше, чем у Гали. Значит, денег всего у них было в четыре раза больше, чем у Чебурашки, а средняя цена вдвое больше, чем у Гали. Изначально Чебурашка смог купить $3 \cdot 3 = 9$ зеркал, тогда вдвоем с Геной при средней цене они купили бы $\frac{4 \cdot 9}{2} = 18$ зеркал.

7. В наборе были гирьки массой 5, 24 и 43 грамма, поровну каждого вида. Все имеющиеся гирьки взвесили, и масса оказалась равной 606060...60 граммам. Докажите, что а) хотя бы одна гирька потеряна; б) более 10 гирек потеряно.

Решение. а) Заметим, что масса одного полного набора — 72 грамма. Это число делится на 8, а суммарная масса — нет, значит, что-то обязательно потеряли. б) Масса одного полного набора делится на 24, а общая масса — нет, зато она делится на 12. Поскольку масса гирек второго типа делится на 24, то суммарная масса потерянных гирек по 5 и по 43 не делится на 24 и делится на 12. Пусть потеряли a гирек по 5 и b гирек по 43. Тогда число $5a + 43b$ делится на 12, но не делится на 24. Поскольку $5a + 43b = 5(a - b) + 48b$, то $5(a - b)$ делится на 12, откуда $a - b$ делится на 12. Равными они быть не могут, т.к. если $a = b$, то $5a + 43b = 48b$ — делится на 24. Значит, a и b отличаются хотя бы на 12, т.е. потеряли как минимум 12 гирек, что больше 10.