Задачи очного тура 5 класса

1. См. задачу 1 4 класса.

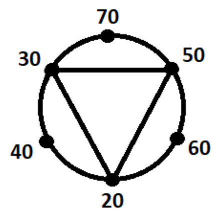
2. *Гномы ушли работать, а Белоснежка скучает. Она выложила на стол пятнадцать камней в кучку. Каждую минуту Белоснежка разбивает одну кучку на две непустые и в одну из них добавляет камень. Как Белоснежке получить с помощью таких действий семь одинаковых кучек?*

Решение. Для начала поймем, сколько камней в кучках. За каждое действие количество кучек увеличивается на один и количество камней тоже. Значит, 7 кучек возникнет через 6 действий, суммарное количество камней при этом будет $15 + 6 = 21$. Тогда в каждой кучке должно быть по три камня. Из этих соображений легко построить пример – нужно каждый раз наибольшую кучку разбивать на $3 + X$, и добавлять камень к X:

15 – 3 13 – 3 3 11 – 3 3 3 9 – 3 3 3 3 3 7 – 3 3 3 3 3 3 5 – 3 3 3 3 3 3 3

Замечание: Возможны и другие последовательности действий, но если возникло хоть одно чётное число, пример не сойдется, так как при разбиении четной кучки всегда получаются кучки разной четности (и, тем самым, неравного размера)

3. *Шпион курсирует между шестью городами страны Воды. Он отметил на карте, по каким дорогам он перемещался между городами и сколько раз побывал в каждом городе. Докажите, что данный рисунок – фальшивка.*



Решение. Заметим, что из городов на дугах шпион попадает в города треугольника. Значит, в городах треугольника шпион должен был побывать не меньше, чем в городах на дугах [-1, если шпион остановился в итоге в городе на дуге]. Но $20 + 30 + 50 < 40 + 70 + 60 - 1$.

4. *В фирме работают несколько сотрудников с суммарной месячной зарплатой* 10 000 *долларов. Добрый менеджер предлагает всем, у кого зарплата до* 500 *долларов, удвоить её, а остальным повысить на* 500 *долларов, тогда суммарная зарплата станет равной* 17 000 *долларам. Злой менеджер предлагает всем, у кого зарплата больше* 500 *долларов, снизить до* 500, *а остальным оставить как есть. Какой станет суммарная зарплата в этом случае?*

Решение. Ответ: 7000

Посмотрим на разность суммарной зарплаты от доброго менеджера и текущей, и поймем, что это и есть суммарная зарплата от злого менеджера:

до 500 — из удвоенной вычитаем текущую, получаем текущую

больше 500 — из увеличенной на 500 вычитаем текущую, получаем 500

5. *Красные марсиане всегда говорят правду, а синие марсиане врут, после чего краснеют. В компании из* 2018 *марсиан каждый по очереди ответил на вопрос, сколько среди них сейчас красных. Ответами были числа* $1, 2, 3, \ldots, 2018$ *(именно в таком порядке). А сколько красных могло быть изначально?*

Решение. Ответ: 0 или 1

Докажем, что двух и более красных быть не может. Предположим, что они нашлись, посмотрим на первых двух красных. Их ответы различаются на количество человек, высказывавшихся между ними, $+1$. Тогда именно на это число должно было измениться количество красных. Но покраснеть могли только высказывавшиеся между ними, а их на один меньше — противоречие.

Если синие все или все, кроме первого, то все сходится: синие утверждают, что красных на один больше, чем реальное количество в этот момент (в варианте с первым красным он говорит правду, что красных 1).

6. *Дима написал десятизначное число, в котором чётные и нечётные цифры чередуются. Потом поменял цифры местами, при этом чётные с нечётными цифрами снова чередуются. Он сложил оба числа и обнаружил, что в сумме тоже чередуются чётные и нечётные цифры. Может ли сумма являться одиннадцатизначным числом?*

Решение. Ответ: нет, не может

Предположим, что может. При сложении двух 10-значных чисел новый разряд мог возникнуть только от переноса, т.е. первая цифра 11-значного числа может быть только 1. По чередованию четности имеем: 1ЧНЧНЧНЧНЧН

В конце нечётная цифра, значит в конце слагаемых цифры разной четности.

Запишем пример в стоблик и определим переносы по чётности:

1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
	Ч	Н	Ч	Н	Ч	Н	Ч	Н	Ч	Н
	Н	Ч	Н	Ч	Н	Ч	Н	Ч	Н	Ч
1	Ч	Н	Ч	Н	Ч	Н	Ч	Н	Ч	Н

Так как слагаемые отличаются только перестановкой цифр, то пять пар «нечётное сверху - чётное снизу» дают все цифры одного слагаемого, и аналогично для пар «чётное сверху - нечётное снизу».

В первом случае каждая пара даёт перенос, значит сумма каждой пары не меньше 11, а сумма цифр слагаемого не меньше $5 \cdot 11 = 55$. Во втором случае все пары, кроме одной, не дают переноса, значит сумма цифр слагаемого не больше $4 \cdot 9 + 17 = 53$.

Но $53 < 55$. Противоречие.

7. *Вова вырезал из клетчатого листа (сторона клетки — 1 см) по линиям сетки фигурку без дырок, а Никита провёл в Вовиной фигуре прямолинейные разрезы (по линиям сетки) общей длиной* 2017 *см, и фигурка распалась на отдельные клеточки. Докажите, что Вовина фигура имела прямолинейный участок границы длиной не менее* 2 *см.*

Решение. Докажем от противного. Пусть таких участков нет, т.е. на границе не найдется двух соседних по стороне клеток. Тогда для любой клетки на границе ее соседи являются соседями по углу. Раскрасим клетки фигуры в шахматную раскраску. Выберем клетку на границе и обойдем от нее границу. Поскольку мы переходим к соседу по углу, то все граничные клетки одного цвета. Пусть этот цвет – черный. Тогда все четыре стороны белых клеток – внутренние, причем сторона любой клетки, лежащая внутри, принадлежит ровно одной белой клетке. Но эти стороны и составляют разрезы, т.е. суммарная длина разрезов = кол-во белых клеток, умноженное на 4. Но 2017 не делится на 4. Противоречие.