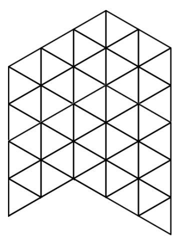
Задачи заочного тура 4 класса

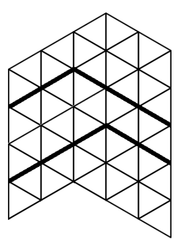
1. *Андрей назвал все натуральные числа от* 180 *до* 220 *включительно («сто восемьдесят», «сто восемьдесят один» и т.д.). Сколько слов он произнёс?*

Решение. Всего названо 41 число. В каждом назван разряд сотен (итого 41 слово). Кроме разряда сотен, ещё по одному слову содержат числа 180, 190, 201–220 (это 22 слова). Число 200 больше не даёт вклада в слова, а остальные 18 чисел содержат ещё по два слова. Итого $41+22+2\cdot 18 = 99$ слов.

2. *Покажите, как разрезать фигурку на картинке на три равные части.*



Решение.

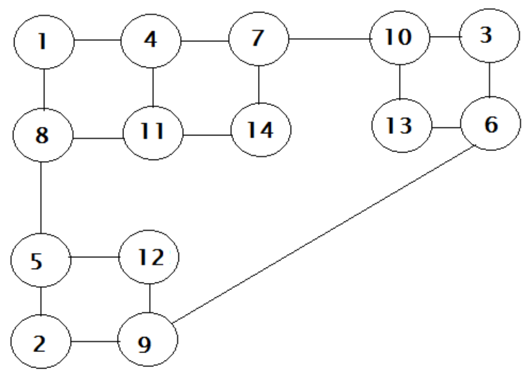


3. *У костра по кругу сидят восемь туземцев из четырёх племен. Каждый говорит своему соседу слева: «если не считать нас, то из моего племени тут никого нет». Известно, что туземцы лгут чужим и говорят правду своим. Сколько может быть туземцев каждого племени?*

Решение. Из одного племени должно быть не менее двух туземцев — уникальный туземец не смог бы солгать соседу, что из его племени больше никого нет. Так как племён всего четыре, то из каждого племени по двое.

4. *Девочка стоит на 1 этаже 14-этажного дома, на 12 и 14 этажах которого живут её подружки. Перемещаться по нему можно только на лифте, который умеет перемещать только на 3 или 7 этажей вверх или вниз. Может ли девочка посетить всех подружек, совершив не больше 6 переездов на лифте?*

Решение (1)**.**



На рисунке изображена схема возможных переездов — в кружочках подписаны этажи, а линиями соединены те этажи, между которыми можно проехать на лифте, нажав одну кнопку.

Отсюда видно, что с первого на 12-й и на 14-й этажи можно добраться минимум за три переезда, а от 12 до 14 этажа требуется не менее четырёх переездов. Поэтому за 6 переездов девочка не сможет посетить всех подружек.

Решение (2)**.** Заметим, что каждый переезд меняет чётность этажа. С первого этажа до двенадцатого или до четырнадцатого требуется нечётное число переездов. Так как за один переезд не управиться, то таких переездов надо не менее трёх. С 12-го до 14-го этажа надо чётное число переездов. За два переезда добраться невозможно (ибо 3 и 7 отличаются на 4), поэтому нужно не менее четырёх переездов. В итоге требуется не менее семи переездов.

5. *Вчера на базаре на сто тугриков можно было купить* 9 *пряников и* 7 *пирожных (и даже дали бы сдачу), а сегодня этой суммы уже не хватает. Зато на эти же* 100 *тугриков сегодня можно купить два пряника и* 11 *пирожных (тоже со сдачей), а вчера бы этой суммы не хватило. Пряник и пирожное стоят целое число тугриков, а цена* *каждой сладости за ночь изменилась не более чем на один тугрик. А сколько сегодня стоит один пряник?*

Решение. Заметим, что что-то одно подорожало (иначе не могла возникнуть ситуация, при которой вчера мы могли купить набор, а сегодня тот же набор — нет), а другая сладость по аналогичным причинам подешевела. Девять пряников и семь пирожных вместе подорожали, значит, пряник подорожал, а пирожное подешевело. Этот набор подорожал за ночь на 2 тугрика, т. е. вчера он стоил 99 тугриков, а сегодня 101. Итак, сегодня 9 пряников $=$ 101 тугрик — 7 пирожных, т.е. вычитая из 101 число, кратное 7, мы должны получить число, кратное 9. Такое возможно лишь в одном случае: $101 - 56 = 45$. Тогда пряник сегодня стоит 5 тугриков, а пирожное — 8 тугриков.

6. *В наборе были гирьки весом* 43*,* 70*,* 57 *г, поровну каждого вида. Малыш потерял несколько гирек (менее пяти), взвесил остаток на весах и получил* 20 172 *грамма. Сколько и каких гирек потерялось?*

Решение (1)**.** Если бы гирьки не терялись, то общий вес оканчивался бы на 0. Следовательно, вес потерянных гирек оканчивается на 8. Это может быть, только если потеряны 4 гирьки 57 г (потеря 70 г или пары $43 + 57$ не влияет на последнюю цифру суммарного веса).

Решение (2)**.** Разобьём изначальный набор гирек на тройки $43+70+57$. В каждой тройке общий вес равен 170 г. Заметим, что потеряно не более $4 \cdot 70 = 280$ г. Поэтому нам следует найти все числа от 20 172 до 20 452, кратные 170. Таких чисел всего два: 20 230 и 20 400 г.

В первом случае потеряно 58 г, чего не может быть. Во втором случае потеряно 228 г. Этот вариант возможен, только если потеряно 4 гири по 57 г. В самом деле, количество потерянных 70-граммовых гирь должно быть чётно (иначе бы потерянный вес был нечётным). Если не потеряно ни одной гири по 70 г, то максимально возможный потерянный вес составляет $4 \cdot 57 = 228$ г. Если же потеряно две 70-граммовые гири, то остаётся 88 г на две оставшиеся гири, а этот вес набрать, очевидно, нельзя.

7. 22 *футболиста сыграли три тренировочных игры (разбиваясь каждый раз на два состава по* 11 *человек). Докажите, что какие то два футболиста все три раза играли в разных командах.*

Решение (1)**.** После первого матча выкрасим ребят, игравших в одной команде, в красный, а игравших в другой команде — в синий. Тогда во втором матче среди каждого из составов найдутся по крайней мере 6 одноцветных ребят, причем эти шестерки разных цветов. А в этих двух шестерках найдутся два разноцветных футболиста, не сыгравших в одной команде и в третий раз (иначе им всем нужно попасть в одну команду, для чего их слишком много).

Решение (2)**.** Изобразим игроков в виде точек и будем соединять отрезками тех, кто был сокомандником. После первой игры от каждого игрока будет выходить по 10 отрезков, а так как каждый соединяет двоих, то всего отрезков будет $\frac{22\cdot 10}{2} = 110$. Теперь посмотрим на произвольную команду во второй или третьей игре. Пусть x ребят из нее были в первом матче на одной стороне, а оставшиеся $11-x$ — на другой. Тогда новых отрезков добавится не более, чем $x(11-x) \leqslant 30$ (это можно, например, легко проверить перебором). То есть за оставшиеся две игры отрезков добавится, максимум, $4 \cdot 30 = 120$ и в итоге их будет не более $110 + 120 = 230$. Но если бы каждый сыграл с каждым, то их было бы $\frac{22\cdot 21}{2} = 231$.