Задачи очного тура 11 класса

Сюжет 7

В таблице расставлены числа. Каждое утро от каждого числа таблицы отнимают текущее среднее арифметическое чисел в его строке, а каждый вечер — текущее среднее арифметическое чисел в его столбце.

7.1. *Пусть таблица имеет размер* 2×10. *Верно ли, что рано или поздно числа перестанут меняться?*

Решение. После первого вечера в каждом столбце будет написаны числа a_i и $-a_i$, значит средние арифметические по строкам будут равны a и $-a$, значит числа в столбце превратятся наутро в a_i+s и $-a_i-s$. Теперь суммы и по строчкам и по столбцам все равны нулю, значит ситуация стабилизировалась.

7.2. *Тот же вопрос для таблицы* 100×100.

Решение. То же, хм, что и в п. 1. После первого хода сумма чисел в таблице станет нулевой (вообще отметим, что отнимая среднее по ряду от всех клеток ряда, мы делаем сумму в ряду нулевой). Значит, вечером мы отнимаем от элементов первого столбца некое b_1, от второго b_2 и т. д., причём $\sum b_i = 0$. От элементов каждой строки таким образом мы суммарно отняли 0 и суммы по строкам остались нулевыми, а по столбцам — стали нулевыми и ситуация стабилизировалась.

7.3. *Докажите, что наступит утро, в которое все числа таблицы изменятся не более,чем на* 0,01.

Решение. Посмотрим на сумму квадратов чисел в таблице. При вычитании среднего $a = \frac{1}{k}\sum a_i$ из набора $a_1, \ldots, a_k$, например, сумма квадратов становится равной

$$\sum(a_i - a)^2 = \sum a_i^2 + ka^2 - 2a\sum a_i = \sum a_i^2 + ka^2 - 2ka^2 = \sum a_i^2 - ka^2,$$

т. е, уменьшается на ka^2. Поскольку суммарное уменьшение (за всё время) не может превзойти константы — изначальной суммы квадратов — то все уменьшения, кроме конечного числа, не превосходят $(0{,}01)^2$, тогда тем более $a^2 < (0{,}01)^2$, т. е. все изменения не больше 0,01.

7.4. *Докажите, что последовательность чисел, появляющихся в фиксированной клетке, имеет предел.*

Решение. Рассмотрим множество расстановок чисел как векторное пространство (с покомпонентными операциями), тогда расстановки с нулевыми суммами в утренних множествах и нулевыми суммами в вечерних образуют два подпространства U и V, а расстановки, постоянные на утренних (соотв. вечерних) множествах — это ортогональные дополнения к ним (относительно стандартного скалярного произведения). Тогда ясно, что наши операции над таблицей суть проекции на U и V (добавляем расстановку, ортогональную U и попадаем в U). Тогда такая последовательность проекций сходится к проекции на пересечение этих подпространств.

Чуть более подробно: если исходная расстановка перпендикулярна этому пересечению, то при каждой проекции длина вектора умножается на число не большее $|\cos\alpha| < 1$, где α — угол между U и V и поэтому стремится к нулю (это задача 4.2.)

В общем случае расстановка раскладывается в сумму расстановки, перпендикулярной $U \cap V$ и расстановкой из $U \cap V$. Наши операции линейны, поэтому можно смотреть по отдельности на эти два случая —

первый дает стремление к нулю, а второй — постоянную последовательность (это 4.3)

Сюжет 8
См. сюжет 2 класса 9.

Сюжет 9
См. сюжет 3 класса 10.