Задачи очного тура 10 класса

Сюжет 4

Во всех пунктах под $f(x), g(x), h(x)$ подразумеваются многочлены с вещественными коэффициентами.

4.1. *Пусть* $f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = -x^2 + x + 1$. *Найдите такой непостоянный многочлен* h, *что* $h(f(x)) = h(g(x))$.

Решение. Например, таким многочленом будет $h(x) = (x-1)^2$.

4.2. *Докажите, что не существует квадратных трёхчленов* f *и* g, *таких что* $f(g(x)) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$.

Решение. Заметим, что $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = x(x-1)^3$. Значит, f имеет два корня (возможно, совпадающих). Пусть $f(s) = f(t) = 0$, и пусть $g(a) = g(b) = s$, $g(c) = g(d) = t$ (возможно, среди этих чисел есть совпадающие, тогда они рассматриваются как кратные корни). Но мы знаем, что три из чисел a, b, c, d равны единице, а одно — нулю. Пусть для определённости $a = b = c = 1$, тогда $s = t$, но тогда не может быть $d = 0$.

4.3. *Пусть* h — *непостоянный многочлен,* $f \neq g$, *и пусть* $h(f(x)) = h(g(x))$. *Докажите, что* $f + g$ — *постоянный многочлен.*

Решение. Степени f и g совпадают, старшие коэффициенты равны или отличаются знаком (если степень h четна). В любом случае их можно представить как $k + l$ и $\pm(k - l)$, где $degk = \deg f = \deg g > \deg l$. Теперь раскроем скобки в $h(k+l) = h(\pm(k-l))$ Сократится $a_n k^n$, если $\deg l > 0$, то максимальная степень есть только в $na_n k^{n-1} l$ и она не сокращается. Значит $\deg l = 0$.

Осталось заметить, что $k + c$ и $k - c$ не могут подойти, так как k принимает все достаточно большие значения какого-то знака, а h не меняет своего значения при увеличении модуля аргумента на на $2c$, то есть найдется (бесконечно) много точек, в которых h принимает одно значение. Противоречие.

4.4. *Пусть непостоянные различные многочлены f и g с положительными старшими коэффициентами таковы, что*

$$f(f(x)g(x)) + f(g(x)) \cdot g(f(x)) + f(f(x)) \cdot g(g(x)) = \\ = g(f(x)g(x)) + f(f(x)) \cdot f(g(x)) + g(f(x)) \cdot g(g(x)).$$

Докажите, что f и g отличаются только одним коэффициентом.

Решение. Пусть $h(x) = f(x) - g(x)$. Тогда жуткое условие

$$f(f(x)g(x)) + f(g(x)) \cdot g(f(x)) + f(f(x)) \cdot g(g(x)) = \\ = g(f(x)g(x)) + f(f(x)) \cdot f(g(x)) + g(f(x)) \cdot g(g(x)).$$

сворачивается в более простой вид $h(f(x)g(x)) = h(f(x))h(g(x))$. Осталось доказать, что такими условиями обладает лишь $h(x) = x^n$. Трудность здесь в том, что это выражение нельзя заменить на $h(ab) = h(a)h(b)$, т. к. a и b принимают не все вещественные значения: во-первых, они ограничены значениями многочленов f и g, а во-вторых, связаны между собой (многочлены f и g фиксированы). Но эту трудность можно обойти — наверняка несколькими способами.

Вот один из способов. Пусть $h(x) = a_n x^n + a_k x^k + \ldots$, где $k < n$ и остальные слагаемые ещё меньших степеней, т. е. h — одночлен. Тогда

$$h(fg) = a_n f^n g^n + a_k f^k g^k + \ldots, \quad h(f)h(g) = a_n^2 f^n g^n + a_n a_k (f^n g^k + f^k g^n) + \ldots .$$

Эти выражения должны быть равны при всех x. Тогда должно выполняться равенство $a_n^2 = a_n$ (при $x \to \infty$ это главный член асимптотики), а кроме того, $(a_n^2 - a_n) f^n g^n + a_n a_k (f^n g^k + f^k g^n) + \ldots = 0$ (остальные слагаемые содержат x в степенях, меньших $n + k$). Устремляя x к бесконечности, получаем, что $a_n a_k = 0$, т.е. h — одночлен.

Сюжет 5

См. сюжет 2 класса 9.

Сюжет 6

Есть две полоски длиной k. В первой самой левой клетке каждой из полосок стоит n фишек. Двое играют в следующую игру: Паша своим ходом сдвигает произвольное множество фишек на одну клетку вправо, а Рома снимает с поля все только что сдвинутые фишки из какой-то из полосок по своему выбору.

6.1. *Пусть $k = 4$, $n = 3$. Всегда ли Паша может добиться того, чтобы одна из фишек дошла до последней клетки?*

Решение. Да. Сдвинем по 2 фишки во вторую клетку, не умаляя общности Рома уберет сдвинутые фишки из второй полоски. Теперь сдвинем одну из только что сдвинутых фишек и одну из второй полоски, Рома должен будет убрать первую из них, иначе она следующим ходом попадёт в конец. Теперь у нас есть по фишке во вторых клетках обеих полосок, сдвинем их обе в третьи клетки. Рома сможет убрать только одну, и следующим ходом мы победили.

6.2. *Пусть $k = 4$, $n = 100$ и Паша каждым ходом сдвигает фишки в полоске только из каких-то двух клеток (по одной в каждой полоске). Докажите, что Рома может добиться того, что не более* 50 *фишек (с учетом снятых) попадут в последние клетки своих полосок.*

Решение. Роме надо добиться, чтобы не более 50 фишек, попав в третью клетку, не были бы немедленно сняты. Стратегия: Если Паша двигает все фишки из 1-ой клетки во 2-ю или из 2-ой в 3-ю, то снимаем в той полоске, где сдвинули больше. Если, например, в одной полоске сдвинули k клеток из 1 в 2, а в другой l клеток из 2 в 3, то выбираем из чисел $k/2$ и l большее и снимаем соответствующую группу фишек.

Будем всякий раз говорить, что мы *пожертвовали* снятой группой ради продвижения неснятой. Заметим, что на то чтобы сдвинуть фишку из 1 в 2, нужно пожертвовать не менее, чем одной фишкой, сдвигаемой из 1 в 2, или не менее, чем половиной фишки, сдвигаемой из 2 в 3. Во втором случае ради этой половины фишки пожертвовали ещё 0,5 фишки, когда её сдвигали в 2. А когда мы сдвинули фишку из 2 в 3, то либо пожертвовали двумя фишками, сдвинутыми в этот момент в 2 либо одной сдвинутой в 3, ради которой мы уже пожертвовали раньше одной фишкой. Итого, чтобы сдвинуть фишку в 3 и не снять её, в любом случае надо пожертвовать $1+2 = 3$ фишками. Откуда доля продвинутых может быть не более четверти. См. про то же короче и яснее в следующем пункте.

6.3. *Пусть $n < 2^{k-3}$. Докажите, что Рома может сделать так, что ни одна из фишек не дойдёт до конца.*

Решение. Пусть у фишки, стоящей на клетке k, рейтинг 2^k, а рейтинг расстановки фишек — это сумма рейтингов всех фишек расстановки. При ходе Паши рейтинг некоторой группы фишек увеличивается вдвое; Рома убирая одну из частей этой группы, может добиться того, чтобы рейтинг группы снизился минимум вдвое, т. е. стал не больше, чем до сдвига. Итого Рома может добиться того, чтобы рейтинг расстановки не увеличился. Изначально он был меньше, чем $2 \cdot 2^{k-3} = 2^{k-2}$, значит рейтинг никакой клетки не может стать 2^{k-2}, т. е. даже в $(k-2)$-ю клетку фишка (не будучи немедленно снятой) не попадёт, а значит никогда, даже будучи немедленно снятой, не попадёт в $(k-1)$-ю.

6.4. *Пусть $n > k \cdot 2^k$. Докажите, что Паша может сделать так, что хотя бы одна из фишек дойдёт до конца.*

Решение. Разобьём всё на блоки по 2^k фишек. За ход сдвигаем в каждой полоске самый правый блок, или один из, и делим его на блока половинного размера. Два из этих четырёх новых блоков Рома изымает, в итоге общее кол-во блоков остается неизменным. Отметим, что делить пополам можем всегда, пока не дошли до конца (даже туда у нас допрёт блок из 2 фишек), значит ходы возможны, пока мы не дойдём до конца ИЛИ пока одна из полосок не опустеет. Поймём, что последнего не случится. Действительно, ясно, что в самой правой занятой клетке полоски у нас не более двух блоков стоит всегда, в первой (после начала игры) — не более $k-1$, в промежуточных — не более одного. В сумме это явно меньше $2k$, поэтому какие-то из $2k$ блоков всегда точно находятся во второй полоске.