# Задачи матквадрата (9–11 классы)

## Алгебра

**1.** Дан квадратный трёхчлен $x^2 + px + q$. Известно, что квадрат суммы его корней на 10 больше суммы квадратов его корней. Найдите $q$.

**2.** Выражение $x^4 - x^3 - 18x^2 + 52x + k$ делится на $x - r$ при двух различных действительных $r$. Одно из них $r = 2$. Найдите другое.

**3.** Найдите наименьшее такое $a$, что при любых $x, y \in [1, 2]$ выполняется неравенство $x^2 + y^2 \leqslant axy$.

**4.** Решите уравнение $x[x] = 533$ в рациональных числах. Ответ запишите в виде несократимой дроби.

**Геометрия**

**5.** В треугольнике $ABC$ со сторонами $AB = 1$ см, $BC = AC = 2$ см, точка $D$ — середина $AB$, а точка $E$ — центр вписанной окружности. Найдите отношение $CE/CD$.

**6.** Определите какую часть площади правильного восьмиугольника $ABCDEFGH$ составляет площадь четырехугольника $ABCD$.

**7.** Квадрат $ABCD$ вписан в окружность радиуса 35. Пусть $DX$ — хорда этой окружности длины 50, $Y$ — точка пересечения $DX$ и диагонали $AC$. Найдите $DY$.

**8.** Внутри некоторого квадрата $ABCD$ взята точка $P$, для которой $PA : PB : PC = 1 : 12 : 17$. Найдите градусную величину угла $APB$.

**Комбинаторика**

**9.** Мальчик Вася нашёл двузначное число и решил поиграть с ним в игру. Он совершил несколько ходов. На каждом ходу он меняет местами цифры этого числа, а затем увеличивает его на 1. Так вышло, что после каждого хода у него получалось двузначное число, причём такое, которое он раньше не получал. Через несколько ходов ему наскучило это занятие и он бросил игру. Какое максимальное количество ходов он мог сделать?

**10.** На шахматной доске расставили 8 не бьющих друг друга ладей. Потом все ладьи заменили на королей. Сколько пар королей могут бить друг друга? В поле ответа напишите количество различных вариантов ответа.

**11.** Улитка ползает путешествует по глобусу. Каждую ночь она ночует на $1^\circ$ севернее или на $1^\circ$ южнее экватора. В течение дня она либо переползает ровно на $30^\circ$ на восток строго вдоль параллели, либо переходит через экватор строго вдоль меридиана. Улитка никогда не ночует в одном месте. Сколько у неё есть способов совершить кругоглобусное путешествие, вернувшись в точку, из которой она стартовала?

**12.** $N$ точек на окружности раскрасили в 4 цвета. Потом соединили отрезками одноцветные точки. Для какого максимального $N$ точки можно покрасить так, чтобы нельзя было выбрать 4 непересекающихся отрезка? (Отрезки с общими концами тоже считаются пересекающимися.)

**Теория чисел**

**13.** Переставьте цифры в числе 7210 так, чтобы получившееся четырёхзначное число не делилось на числа от 2 до 40.

**14.** У скольких чисел от 1200 до 1500 количество делителей является нечётным простым числом?

**15.** Разность двух натуральных чисел равняется квадрату их наибольшего общего делителя, а произведение является квадратом некоторого натурального числа $A$. На какую цифру может заканчиваться $A$? Перечислите все возможные варианты в порядке возрастания через пробел.

**16.** Найдите наибольшее натуральное $n$, при котором $n^2 + 1$ имеет делитель на интервале $[n,\ n + 100]$.