Условия

Заочный тур (4–8 классы)

4–5 классы

1. Покажите, как можно разрезать квадрат 5×5 на четыре части «по клеточкам» и сложить из этих частей два квадрата.

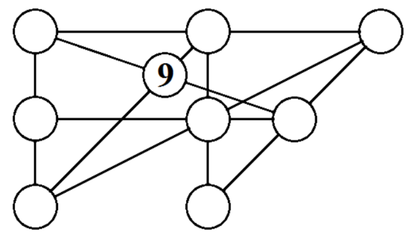
2. Пёс и кот стащили гирлянду из 76 сосисок и начали её есть одновременно с двух концов. Пёс за минуту съедает вдвое больше сосисок, чем кот. Самая вкусная сосиска — 49-я со стороны пса. Кому из них она достанется?

3. К левому берегу реки подошли четверо бродяг, а к правому — четверо портных. Всем нужно на противоположный берег. У левого берега есть двухместная лодка (в ней можно плыть в одиночку или вдвоём). Трое портных трусливые: они не согласны оказаться на одном берегу с бродягами, если там портных меньше, чем бродяг. А вот храброму четвёртому портняжке в меньшинстве быть не страшно. Как им всем переправиться?

4. Незнайка написал на шести карточках цифры от 1 до 6. Из этих карточек он составил три двузначных числа, которые перемножил. Результат он забыл, но потом рассказывал всем, что этот результат оканчивался то ли на 1, то ли на 5, то ли на 9. На какую же цифру оканчивался Незнайкин результат, если он не ошибся в подсчётах? (Шестёрку Незнайка использовал как шестёрку, а не как девятку.)

5. На экскурсию отправились четыре класса: 4А, 4Б, 5А и 5Б. Из каждого класса поехало по 20 человек. Оказалось, что из четвёртых классов мальчиков поехало в три раза больше, чем девочек. А из «А» классов, наоборот, девочек оказалось в три раза больше, чем мальчиков. Сколько мальчиков из 4Б класса поехало на экскурсию?

6. В компании 100 человек, причём каждый из них знаком с 50 членами компании. Известно, что нет троих, попарно знакомых друг с другом (то есть если X знаком с Y, а Y знаком с Z, то Z не знаком с X). Докажите, что не найдется пятерых из них A, B, C, D и E, знакомых по кругу (A с B, B с C, C с D, D с E, E с A).



7. а) Расставьте в кружочки различные числа от 1 до 8 так, чтобы в каждом ряду сумма трёх чисел была одной и той же (ряды показаны отрезками).

б) Чему может быть равна эта сумма? Приведите все возможные варианты и покажите, что других нет.

6 класс

8. Запишите несколько целых чисел через запятую так, чтобы выполнялись два условия: каждая из десяти цифр использована в записи ровно по одному разу, а сумма каждых двух соседних чисел равна 12 или 13.

9. См. задачу **3**.

10. Дана белая доска 8×8. Паша покрасил в красный цвет несколько непересекающихся доминошек (доминошка — прямоугольник, состоящий из двух соседних клеток доски). Затем подумал и ещё несколько доминошек (тоже непересекающихся, но, возможно, пересекающих красные доминошки) покрасил в синий цвет. В итоге клетки, покрашенные дважды, оказались фиолетовыми. Оказалось, что белых клеток втрое меньше, чем фиолетовых, а красных — вчетверо больше, чем фиолетовых. А сколько стало синих клеток? Укажите все возможные варианты ответа и объясните, почему эти варианты возможны, а другие — нет.

11. На острове Логики живут рыцари (всегда говорящие правду), лжецы (всегда говорящие неправду) и софисты. Софист может произносить только такие фразы, которые на его месте не смогли бы сказать ни рыцарь, ни лжец. Например, стоя рядом со лжецом, софист может сказать фразу «Мы оба лжецы» (потому что если бы он был рыцарем, то такая фраза была бы ложью, а если бы он был лжецом, она была бы истиной). Однажды софист произнёс три утверждения о жителях острова:

1. На острове живут ровно 25 лжецов.

2. На острове живут ровно 26 рыцарей.

3. Софистов на острове не меньше, чем рыцарей.

Сколько всего человек живут на острове?

12. Незнайка написал на одной карточке единицу, на двух — двойку, на трёх — тройку, на четырёх — четвёрку, на пяти — пятёрку, на шести — шестёрку и на семи карточках — семёрку. Из полученных 28 карточек он составил 14 двузначных чисел, которые перемножил. Результат он забыл, но потом рассказывал всем, что этот результат оканчивался то ли на 2010, то ли на 2012, то ли на 2016. На какие же четыре цифры оканчивался Незнайкин результат, если он не ошибся в подсчётах? (Все шестёрки Незнайка использовал как шестёрки, а не как девятки.)

13. Квадрат 13×13 разрезали по клеткам на несколько частей и сложили из них два квадрата. Каким наименьшим числом частей могли обойтись?

14. Круговая железная дорога соединяет 136 городов. Требуется организовать между некоторыми парами городов телепорты так, чтобы от любого города можно было добраться до любого другого с помощью телепортов и железной дороги, проехав на поезде не более одного перегона. Какое наименьшее число телепортов необходимо организовать? (Поезда ездят в обе стороны; телепорт тоже двусторонний, то есть если есть телепорт из A в B, то он является телепортом и из B в A.)

7 класс

15. Приведите пример трёх различных натуральных чисел, больших единицы, таких, что в каждой паре этих чисел большее делится на меньшее, а сумма всех этих чисел равна 56.

16. Зине подарили часы с минутной и часовой стрелкой без цифр, причём часовая стрелка у них двигается по истечении каждого часа.

Как-то раз Зина подошла к зеркалу и вычислила разницу реального времени и времени, которое показали стрелки на зеркальных часах (например, если обычные часы показывают 10:45, то зеркальные — 2:15). У Зины получилось, что эта разница равна 420 минутам. Докажите, что Зина ошиблась.

17. См. задачу **10**.

18. См. задачу **6**.

19. Из чисел от 0 до n выбрали двенадцать и расставили по кругу. Оказалось, что разность любых двух несоседних чисел делится на количество чисел между ними (количество чисел считается в том направлении, в котором их меньше). Найдите наименьшее возможное n.

20. Круговая железная дорога соединяет 300 городов. Требуется организовать между некоторыми парами городов телепорты так, чтобы от любого города можно было добраться до любого другого с помощью телепортов и железной дороги, проехав на поезде не более одного перегона. Какое наименьшее число телепортов необходимо организовать? (Поезда ездят в обе стороны; телепорт тоже двусторонний, то есть если есть телепорт из A в B, то он является телепортом и из B в A.)

21. Решите уравнение в натуральных числах: $2n^k - 3n = k!$ (напомним, что $k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$).

8 класс

22. Мартышка, слонёнок, удав и бабушка удава решили измерить свой рост (в попугаях, естественно). Выяснилось, что рост каждого из них равен целому числу попугаев, при этом удав выше, чем вместе взятые мартышка и слонёнок, но ниже, чем вместе мартышка с бабушкой; слонёнок вместе с мартышкой выше бабушки удава, а слонёнок вместе с бабушкой — выше, чем удав вместе с мартышкой. Докажите, что общий рост всех четверых не меньше, чем 27 попугаев.

23. Пять различных чисел таковы, что в каждой паре этих чисел большее делится на меньшее, а сумма всех этих чисел равна 899. Чему может быть равно наименьшее из чисел, если оно больше 1? Приведите все возможные варианты ответа, докажите, что они возможны, а других вариантов нет.

24. В остроугольном треугольнике ABC точки B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB соответственно, а B_2 и C_2 — основания высот, опущенных на эти стороны. Известно, что угол между прямыми B_1C_2 и B_2C_1 на 60° больше угла A. Чему он равен?

25. Племя собралось для выбора вождя. Каждый из аборигенов участвовал в голосовании и имел по несколько голосов. (Голосовать за одного и того же кандидата несколько раз одному и тому же голосующему нельзя, зато можно проголосовать за несколько разных.) После голосования для каждого аборигена посчитали суммарное количество голосов за него и за всех тех, кто за него голосовал, побеждал тот, у кого эта сумма оказывалась наибольшей. Могло ли случиться такое, что победил кандидат, за которого проголосовало наименьшее количество избирателей?

26. См. задачу **19**.

27. На складе лежат 2016 мешков: каждый мешок лежит либо на полу, либо в другом мешке. Два мешка называются соседними, если они либо оба лежат на полу, либо оба лежат в одном и том же мешке. Ход состоит в следующем. Выбирается некоторый мешок X; все мешки, лежащие в X (вместе с их содержимым), вытаскиваются из X и делаются соседними с ним (т. е. кладутся на пол, если X лежит на полу, а в противном случае — кладутся в тот же мешок, в котором лежит X); одновременно с этим все мешки, соседние с X, наоборот, засовываются в X. За какое наименьшее число ходов из любой ситуации можно собрать все мешки «матрёшкой»?

28. См. задачу **21**.