Задачи очного тура

4 класс

1. Семеро гномов выстроились по росту, начиная с самого высокого. Первый (то есть самый высокий) сказал: «Мой рост 60 см». Второй сказал: «Мой рост 61 см». Далее по порядку: «Мой рост 62 см», «Мой рост 63 см», «Мой рост 64 см», «Мой рост 65 см», и наконец самый низкий сказал: «Мой рост 66 см». Какое наибольшее число гномов могли сказать правду?

2. Кошачий корм продаётся в больших и маленьких пакетах. В большом пакете больше корма, чем в маленьком, но меньше, чем в двух маленьких. Одного большого и двух маленьких пакетов корма кошке хватает ровно на два дня. Хватит ли кошке 4 больших и 4 маленьких пакета корма на шесть дней?

3. У Жени было 9 карточек с числами от 1 до 9. Он потерял карточку с числом 7. Можно ли разложить оставшиеся 8 карточек в ряд так, чтобы любые две соседние карточки образовывали число, делящееся на 7?

4. Разрежьте клетчатый треугольник (см. рис.) на несколько частей разной площади так, чтобы суммы чисел в каждой части были равны.

5. Фокусник с ассистентом показывают следующий фокус. Зритель расставляет по кругу 11 монет (каждая — орлом или решкой вверх). Ассистент закрывает кружками все монеты, кроме одной. Затем входит фокусник и показывает ещё на одну (закрытую) монету, лежащую так же, как и открытая. Объясните, как могли договориться фокусник и ассистент, чтобы показать этот фокус.

6. В стране 100 городов, разделённых на три республики. Некоторые города соединены авиалиниями. Министр связи нашёл не менее 70 таких городов, что из каждого выходит не менее 70 авиалиний. Докажите, что какая-то авиалиния соединяет два города одной республики.

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

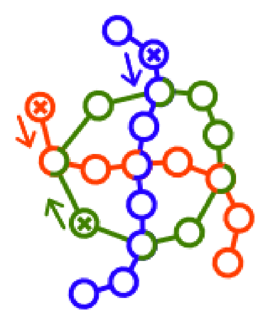
7. Троим детям назвали число без нулей в записи. Каждый из детей как-то переставил цифры в этом числе. Оказалось, что сумма этих четырёх чисел (включая исходное) записывается одними единицами. Докажите, что в исходном числе есть цифра, не меньшая 5.

5 класс

8. Шпион занимает одну клетку и видит на две клетки вперед, а также боковым зрением на одну клетку вправо и влево. Поставьте 18 шпионов на доску 6×6 так, чтобы никто никого не видел.

9. Две гидры с 2016 и 2017 головами подхватили странную болезнь. Каждую неделю у них отмирает 4 головы на двоих, а прирастает по 5 или по 7 голов у каждой. Смерть от болезни наступит, если и только если количество голов у гидр сравняется. Лечащий врач утверждает, что гидры будут жить при любом ходе болезни. Прав ли он?

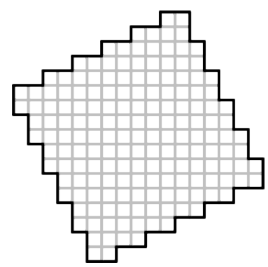
10. Метро города N состоит из трех линий, его схема изображена на рисунке. Изначально поезда находятся у отмеченных станций и начинают движение в сторону, указанную стрелкой. Каждую минуту каждый поезд проезжает ровно один перегон между станциями. Оказавшись на конечной станции, поезд мгновенно разворачивается и начинает движение в обратную сторону. На каких станциях поезда окажутся через 2016 минут?



11. Выпало много снега, и ребята решили лепить снеговиков. Для этого они скатали 99 комьев с массами 1 кг, 2 кг, 3 кг, . . . , 99 кг. Снеговик состоит из трех комьев, поставленных друг на друга, а один ком можно поставить на другой в том и только в том случае, когда масса первого хотя бы в два раза меньше массы второго. Какое наибольшее количество снеговиков смогут слепить дети?

12. У короля есть 100 гончих собак, и он хочет отобрать троих для охоты. Он собрал 100 придворных и каждого спросил, каких трех собак тот считает самыми быстрыми. Оказалось, что для любых двух придворных найдется две собаки, на которых указали они оба. Докажите, что выбор каких-то двух придворных полностью совпал.

13. Вася может брать прямоугольник, целиком лежащий внутри фигуры, изображенной на рисунке. Какое минимальное количество прямоугольников должен взять Вася, чтобы каждая клетка фигуры была покрыта хотя бы одним прямоугольником?

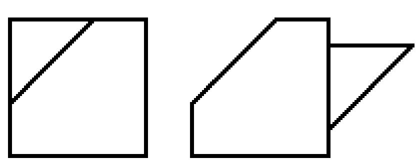


14. Илюша придумал число, не содержащее нулей. Затем Илюша переставил в нем цифры и сложил получившееся число с исходным. Может ли результат записываться только единицами?

6 класс

15. Кошачий корм продаётся в больших и маленьких пакетах (в большом пакете больше корма, чем в маленьком). Одного большого и четырёх маленьких пакетов кошке хватает ровно на две недели. Обязательно ли одного большого и трёх маленьких пакетов хватит на 11 дней?

16. На рисунке показано, как разрезать квадрат на две части и составить из них восьмиугольник. Разрежьте какой-нибудь треугольник на две части, из которых можно составить 20-угольник.



17. Найдите наибольшее натуральное число, которое нельзя представить как сумму двух составных чисел. (Напоминаем, что натуральное число называется составным, если оно делится на какое-либо натуральное число, кроме самого себя и единицы.)

18. Среди 65 жителей деревни двое — хитрецы, а остальные рыцари. Рыцарь всегда говорит правду, а хитрец может как сказать правду, так и соврать. Любому жителю можно показать список некой группы жителей (в том числе состоящий из одного человека) и спросить, все ли они рыцари. Как найти обоих хитрецов, задав не более 30 вопросов?

19. У Деда Мороза и есть много одинаковых циферблатов в виде правильных 12-угольников, на которых напечатаны числа от 1 до 12. Он кладёт эти циферблаты стопкой друг на друга (по одному, лицевой стороной вверх). При этом вершины циферблатов совмещаются, но числа в совмещённых вершинах не обязательно совпадают. Ёлочка зажжётся, как только суммы чисел во всех 12 столбцах будут иметь одинаковый остаток от деления на 12. Сколько циферблатов в этот момент может оказаться в стопке?

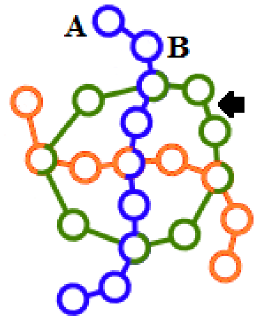
20. В городе есть 10 параллельных улиц, идущих с севера на юг, и ещё 10 улиц, идущих с запада на восток, все они образуют квадрат 9×9. На каждом перекрёстке находится площадь (всего 100 площадей). Расстояние от каждой площади до соседней вдоль какой-либо улицы — 1 км. Аптекой шаговой доступности называется аптека, до которой можно добраться по улицам, пройдя не более 3 км. Минздрав хочет установить на некоторых площадях аптеки так, чтобы любой человек, идущий по любой улице, независимо от направления пути, приближался к какой-нибудь аптеке шаговой доступности (т. е. расстояние между ними сокращалось). Хватит ли для этого 12 аптек?

21. Барон Мюнхгаузен рассказывал историю. «Собралась нас целая толпа. Дошли до перекрёстка. Тогда половина нашей группы повернула налево, треть — направо, а пятая часть пошла прямо». «Но позвольте, — заметил герцог, — сумма половины, трети и пятой части ведь не равна единице, поэтому вы обманываете!» Барон возразил: «Не обманываю, а округляю. Например, идут 17 человек. Я говорю, что треть повернула. По-вашему, одному из людей разорваться надо? Нет, с округлением получится, что повернули шестеро. Ведь из целых чисел самое близкое к дроби $17/3$ — число 6. А если я говорю, что из 17 человек повернула половина — значит, это 8 или 9 человек». Известно, что барон Мюнхгаузен никогда не врёт. А какое наибольшее количество человек могло быть в толпе?

7 класс

22. См. задачу **4**.

23. Метро города N состоит из трех линий, его схема изображена на рисунке. За минуту каждый поезд проезжает ровно один перегон между станциями. Оказавшись на конечной станции, поезд мгновенно разворачивается и начинает движение в обратную сторону, а на каждой станции с пересадкой обязательно меняет линию движения. Известно, что поезд начал свое движение на станции A, а закончил через 2016 минут на станции B. Докажите, что он побывал на перегоне, отмеченном стрелкой.



24. Андрюша написал пятизначное число. Потом написал другое пятизначное число, отличающееся от первого перестановкой двух цифр. Сумма этих чисел равна 111111. Докажите, что в записи числа встречается 0.

25. Из 15 палочек собрали пять треугольников. Обязательно ли существует другой способ собрать из этих палочек пять треугольников?

26. Точка M — середина стороны AC треугольника ABC. Точка N на отрезке AM такова, что угол MBN равен углу CBM. На продолжении отрезка BN за точку N выбрана точка K так, что угол BMK прямой. Докажите, что $BC = AK + BK$.

27. Решите в натуральных числах уравнение $(a+b)c! = (a!+b!)c$

28. Фокусник с ассистентом показывают следующий фокус. Зритель расставляет в ряд 27 монет (каждая — орлом или решкой вверх). Ассистент закрывает кружками все монеты, кроме пяти одинаково лежащих. Затем входит фокусник и показывает ещё на пять монет, лежащих так же, как и открытые. Объясните, как должны договориться фокусник и ассистент, чтобы фокус удался.

8 класс

29. Пекарня производит пироги и продаёт их магазинам по оптовой цене (она постоянна в течение дня, но в разные дни может различаться). Цена пирога в магазине «Пекарь Плюс» всегда превышает оптовую цену на одно и то же положительное количество рублей, а цена в магазине «Звезда» всегда больше оптовой цены в одно и то же количество раз. За два дня в этих магазинах были такие цены на пирог: 64, 64, 70, 72 рубля (в каком-то порядке). Определите оптовую цену пирога в каждый из дней.

30. Решите в простых числах уравнение $p^2 - 6pq + q^2 + 3q - 1 = 0$.

31. Пусть I — центр вписанной окружности α треугольника ABC. Описанная окружность треугольника AIC пересекает α в точках P и Q (так, что P и A лежат по одну сторону от прямой BI, а Q и C — по другую. Пусть M — середина меньшей дуги AC окружности α, а N — середина меньшей дуги BC. Докажите, что если $PQ \parallel AC$, то треугольник ABC равнобедренный.

32. В стране 1 000 000 человек, каждый знаком хотя бы с одним жителем. После опросов сложилась парадоксальная ситуация: ровно 90% населения призналось, что верит в деда Мороза, однако каждый житель может утверждать, что среди его знакомых ровно 10% верит в деда Мороза. Докажите, что кто-то из жителей знаком не менее чем с 810 людьми.

33. Пусть есть клетчатый квадрат $n \times n$. Оригинальным набором клеток называется набор из $n - 1$ клеток, никакие две из которых не находятся на одной вертикали или горизонтали. Для каких n из этого квадрата можно выбрать $n+1$ непересекающийся оригинальный набор?

34. Докажите, что существует бесконечно много натуральных N таких, что многочлен $x^8 + Nx^4 + 1$ можно разложить на множители, каждый из которых является многочленом четвёртой степени с целочисленными коэффициентами.

35. На столе лежит куча из 660 камней. За ход можно разбить любую из имеющихся куч на две меньших. При этом размеры любых двух куч, находящихся на столе одновременно, должны отличаться менее чем в два раза. Какое наибольшее количество кучек может получиться?

9 класс

Сюжет 1

Пусть I — центр вписанной окружности α треугольника ABC. Описанная окружность треугольника AIC пересекает α в точках P и Q так, что P и A лежат по одну сторону от прямой BI, а Q и C — по другую. Обозначим через M середину меньшей дуги AB описанной окружности треугольника ABC, а через N — середину меньшей дуги BC.

36. Докажите, что если $PQ \parallel AC$, то треугольник ABC равнобедренный.

37. Докажите, что $MN > PQ$.

38. Пусть L — точка пересечения прямых AP и CM, S — точка пересечения прямых AN и CQ. Докажите, что $LS \parallel PQ$.

39. Докажите, что $MN \parallel PQ$.

Сюжет 2

Пусть $x, y, z > 0$. Докажите следующие неравенства:

40.

$$\frac{x^2}{x^2+2yz} + \frac{y^2}{y^2+2zx} + \frac{z^2}{z^2+2xy} \geqslant 1$$

41.

$$\frac{x^2+2y^2+2z^2}{x^2+yz} + \frac{y^2+2z^2+2x^2}{y^2+zx} + \frac{z^2+2x^2+2y^2}{z^2+xy} > 6$$

42.

$$\frac{x^3}{x^3+2y^2\sqrt{zx}} + \frac{y^3}{y^3+2z^2\sqrt{xy}} + \frac{z^3}{z^3+2x^2\sqrt{yz}} \geqslant 1$$

43.

$$\frac{x^3}{x^3+2y^2z} + \frac{y^3}{y^3+2z^2x} + \frac{z^3}{z^3+2x^2y} \geqslant 1$$

Сюжет 3

На столе лежит куча из n камней. За ход можно разбить любую из имеющихся куч на две меньшие. При этом размеры любых двух куч, находящихся на столе одновременно, должны быть «похожими».

44. Пусть похожие размеры — это те, которые отличаются не более чем в $\sqrt{2}$ раз. Докажите, что из исходной кучи не получится сделать 3 кучки.

45. Пусть похожие размеры — это те, которые отличаются не более чем вдвое. Докажите, что тогда любую кучу можно разложить на кучи по одному камню.

46. Пусть похожие размеры — это те, которые отличаются менее чем в 2 раза. Докажите, что кучу из 660 камней можно разбить на 30 кучек.

47. Пусть похожие размеры — это те, которые отличаются менее чем в 2 раза. Докажите, что кучу из 660 камней нельзя разбить на 31 кучку.

10 класс

Сюжет 4

Пусть I — центр вписанной окружности ω треугольника ABC. Описанная окружность треугольника AIC пересекает ω в точках P и Q (так, что P и A по одну сторону от прямой BI, а Q и C — по другую).

48. Докажите, что если $PQ \parallel AC$, то треугольник ABC равнобедренный.

49. Дан треугольник DEF. Окружность, проходящая через вершины E и F пересекает стороны DE и DF в точках X и Y соответственно. Биссектриса угла $\angle DEY$ пересекает DF в точке Y', а биссектриса угла $\angle DFX$ пересекает DE в точке X'. Докажите, что $XY \parallel X'Y'$.

50. Пусть M — середина дуги AB описанной окружности треугольника ABC (выбираем ту дугу, которая не содержит точку C), а N — середина дуги BC (выбираем ту дугу, которая не содержит точку A). Докажите, что $MN \parallel PQ$.

51. Пусть T — точка пересечения прямых AP и CQ, а K — точка пересечения прямых MP и NQ. Докажите, что T, K и I лежат на одной прямой.

Сюжет 5

P — простое число. Числа от 1 до $P(P-1)$ нужно расставить в клетки таблицы $P \times (P-1)$ (P строк и $P-1$ столбец) так, чтобы у каждого числа остаток от деления на P был таким же, как и у суммы соседних с ним по стороне чисел.

52. Пусть в первой строке стоят по порядку числа от 1 до $P-1$. Чему может быть равно P?

53. Пусть $P = 7$, а каждое число во второй строке в три раза больше своего соседа из первой строки. Докажите, что числа в двух центральных клетках делятся на 7.

54. Пусть каждое число во второй строке в K раз больше своего соседа из первой строки. Докажите, что каждое число из этой таблицы, умноженное на K, дает такой же остаток при делении на P, как и сумма соседних с ним по столбцу чисел.

55. Докажите, что при $P = 23$ существует расстановка, удовлетворяющая условиям задачи.

Сюжет 6

На столе лежит куча из n камней. За ход можно разбить любую из имеющихся куч на две меньших. При этом размеры любых двух куч, находящихся на столе одновременно, должны быть «похожими».

56. Пусть похожие размеры — это те, которые отличаются не более, чем в $\sqrt{2}$ раз. Докажите, что тогда никакую кучу нельзя разбить на три кучи.

57. Пусть похожие размеры — это те, которые отличаются не более, чем вдвое. Докажите, что тогда любую кучу можно разложить на кучи по одному камню.

58. Пусть похожие размеры — это те, которые отличаются не более, чем в k раз. Докажите, что для любого $k < 2$ найдётся число N_k такое, что никакую кучу нельзя разложить более, чем на N_k куч.

59. Пусть похожие размеры — это те, которые отличаются строго меньше, чем в 2 раза. На какое наибольшее количество куч можно разбить кучу из 660 камней?

11 класс

Сюжет 7

Дан произвольный треугольник ABC с ортоцентром H. Внутренняя и внешняя биссектрисы угла B пересекают прямую AC в точках L и K соответственно. Рассматриваются две окружности: w_1 — описанная окружность треугольника AHC, w_2 построена на отрезке KL, как на диаметре.

60. Пусть точка T такова, что TL является биссектрисой треугольника ATC. Докажите, что тогда TK является внешней биссектрисой того же треугольника.

61. Пусть X — такая точка пересечения окружностей w_1 и w_2, что X и B лежат по разные стороны относительно прямой AC. Докажите, что тогда точка X лежит на высоте BH треугольника ABC.

62. Пусть Y — такая точка пересечения окружностей w_1 и w_2, что точки Y и B лежат по одно сторону относительно прямой AC. Докажите, что точка Y лежит на медиане BM.

63. Докажите, что касательная к окружности w_1 в точке пересечения с медианой BM пересекает прямую AC в середине отрезка KL.

Сюжет 8

Дан многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами. Пусть $l_P(c)$ — это количество решений уравнения $P(x) = c$. Обозначим за A_P множество всех возможных значений $l_P(c)$.

64. Можно ли по A_P определить степень многочлена P?

65. Какой наименьшей степени может быть многочлен P, если известно, что существует такое целое число b, что в A_P содержатся больший и меньший чем b элементы, но не содержится b?

66. Могут ли наименьший и наибольший элементы множества A_P быть разной чётности?

67. Пусть P — некоторый многочлен степени 8. Какое минимальное количество чисел нечётных может быть в множестве A_P, если известно, что число 8 в нем содержится?

Сюжет 9

См. сюжет **6**.