Ответы и решения

Очный тур

4 класс

1. Ответ: 1.

Никакие два гнома не могли сказать правду, т. к. в этом случае более высокий назовёт более низкий рост. Один же гном (любой) может сказать правду.

2. Ответ: нет.

4 больших и 4 маленьких пакета содержат меньше корма, чем 3 больших и 6 маленьких, а их хватает ровно на 6 дней. Значит, 4 больших и 4 маленьких пакетов кошке на 6 дней не хватит.

3. Ответ: нет.

Заметим, что после 5 обязательно идёт 6, после 6 — 3, после 3 — 5, после 5 — 6. До этих цифр тоже не могут идти никакие другие. Следовательно, поставить все эти цифры в один ряд нельзя.

4. Общая сумма чисел равна 63, а в каждой части она, очевидно, должна быть не менее 10. Значит, в каждой части сумма чисел равна 21. Пример: одна часть — уголок с числами 10, 6 и 5, вторая — пентамино с числами 10, 5, 4, 1, 1 (правая часть фигуры), третья — всё остальное.

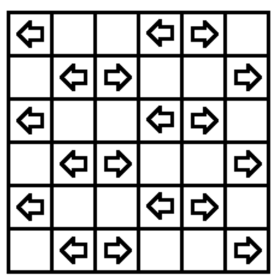
5. Фокусник договаривается с ассистентом, что он показывает на следующую (по часовой стрелке) монету после незакрытой. Так как всего монет нечётное число, какие-то две подряд идущие монеты будут лежать одинаковыми сторонами. Ассистент оставляет открытой первую из них (если смотреть по часовой стрелке), остальные закрывает. Фокусник показывает на следующую монету, и она обязательно лежит так же, как и открытая.

6. Допустим противное: все авиалинии соединяют города разных республик. Назовём миллионниками те города, из которых выходит не менее 70 авиалиний. Если в республике есть миллионник, то в такой республике не более 30 городов. Так как миллионников всего 70, то они есть во всех трёх республиках, а значит, всего городов не более 90.

7. Допустим противное: каждая цифра не более 4. Тогда сумма цифр этих чисел в каждом разряде — 10 или 11 (из разряда в предыдущий не может переноситься более одной единицы, так как все цифры не превосходят 4; но с другой стороны, сумма цифр в каждом разряде не может быть равна 0 или 1, т. к. нулей в записи нет). Но это означает, что сумма цифр в последнем разряде равна 11, а в каждом из остальных — 10 (т. к. перенос есть в каждом разряде). Итого общая сумма цифр нечётна. Но в каждом из четырёх чисел один и тот же набор цифр, а значит, общая сумма цифр кратна 4. Противоречие.

5 класс

8. Например, можно расставить так (шпионы становятся в квадраты, занятые стрелками, и каждый поворачиваются лицом в направлении соответствующей стрелки):



9. Ответ: да.

Заметим, что суммарное количество голов всегда нечетно. Таким образом, врач прав, и количество голов сравняться не может.

10. Заметим, что красную ветку поезд проезжает целиком ровно за 7 минут, синюю — за 8 минут, зеленую — за 9 минут. Получается, поезда оказываются в исходных позициях на красной ветке каждые 14 минут, на синей — каждые 16, на зеленой — каждые 9. А так как 2016 делится и на 14, и на 16, и на 9, через 2016 минут поезда окажутся в начальных позициях.

11. Ответ: 24.

Два кома массами от 50 до 99 кг не могут оказаться в одном снеговике, поэтому в каждом снеговике найдутся хотя бы два кома массами от 1 до 49 кг. То есть снеговиков не может быть больше 24.

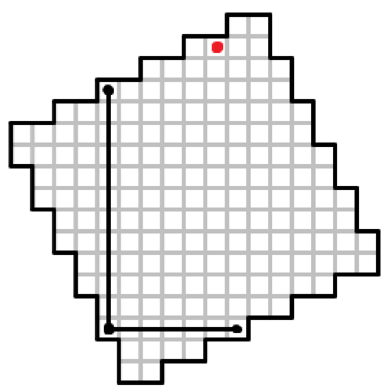
Пример строится жадно: сначала берем три кома массами, например, 96, 48 и 24 кг. Теперь если массу каждого уменьшить на 1, снеговика все еще можно будет слепить. Действительно, если больший ком уменьшается на 1, то для сохранения неравенства меньший должен уменьшиться хотя бы на 0.5, а он тоже уменьшается на 1.

12. Возьмем придворного, допустим, он указал на 1, 2 и 3 псов. Допустим еще, что нет сделавших такой же выбор. Тогда все бьются на 3 группы: выбравшие псов с номерами 1 и 2, выбравшие псов 1 и 3 и выбравшие 2-ого и 3-его псов.

Если хотя бы две группы непусты, то третья собака у их участников должна совпадать, иначе нарушится условие о наличии двух общих собак. Тогда третья собака совпадает у всех придворных, в том числе у людей из одной группы. Какая-то группа состоит хотя бы из двух придворных, значит их множества совпадут.

Иначе людей в одной группе 99, а собак осталось 97, из принципа Дирихле следует, что и в этом случае найдутся двое с совпадающим мнением.

13. Ответ: 12.



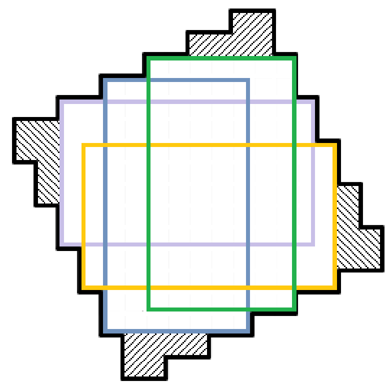
Посмотрим на углы. Они бывают двух видов — те, вместе с которыми можно покрыть не более одного другого, и те, вместе с которыми можно покрыть еще два. Углов первого типа 12, второго — тоже 12.

Заметим, что углы второго типа разбиваются на тройки единственным образом (каждая тройка содержит «средний» угол, а их всего 4, это легко проверить).

Посмотрим на отмеченную красным клетку. Если отмеченная тройка закрыта, то прямоугольник, закрывающий эту клетку, закроет дополнительно не более одного угла. Аналогично для всех остальных троек.

Таким образом, выходит, что на каждую тройку углов, закрытую одним прямоугольником, приходится еще один прямоугольник, покрывающий не более одного угла, т. е. на четверку углов приходится по 2 прямоугольника. Ну а остальные углы покрываются не более, чем по два одним прямоугольником, ну и получается оценка 12.

Пример показан на рисунке (четыре прямоугольника нарисованы, а оставшаяся заштрихованная часть легко покрывается восемью прямоугольниками).



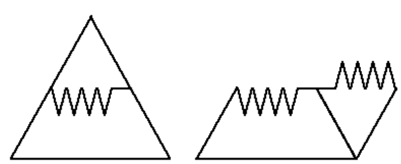
14. Предположим противное. Тогда сумма двух последних цифр не может равняться единице, поскольку в числах нет нулевых цифр, а значит она равняется 11. Тогда сумма двух предпоследних цифр — 10, третьих с конца — тоже 10 и т.д. Выходит, что сумма всех этих сумм нечетна, с другой стороны она равна удвоенной сумме цифр исходного числа, то есть четному числу. Мы получили противоречие, значит Илюша не может получить результат только из единиц.

6 класс

15. Ответ: хватит.

Предположим, что не хватит. Значит, одного маленького пакета (которым различаются эти наборы) хватает более чем на три дня. Значит, пяти маленьких пакетов хватит более чем на 15 дней, а одного большого и четырёх маленьких — тем более.

16. Например, так:



17. Ответ: 11.

Все большие числа представимы нужным способом: нечётные в виде «9 + чётное, большее двух», чётные в виде «8 + чётное, большее двух».

18. На самом деле достаточно 16 вопросов (да и это не минимум).

За первые четыре вопроса найдём рыцаря. Сделаем это так: спросим первого и второго жителей о третьем. Если оба ответили, что он рыцарь, то он рыцарь (в противном случае все трое хитрецы, что невозможно).

Если нет, то спросим четвёртого и пятого о шестом. Если и здесь кто-то сказал, что он хитрец, то среди 1, 2, 3 есть хитрец и среди 4, 5, 6 есть хитрец, поэтому остальные 59 жителей — рыцари, оставшихся вопросов нам точно хватит. В противном случае шестой — рыцарь.

Оставшиеся вопросы будем задавать найденному рыцарю об остальных 64 жителях. Дихотомией найдём одного хитреца за 6 вопросов, а за следующие 6 вопросов – ещё одного.

19. Ответ: 12.

Пусть в стопку лежит k циферблатов. Посмотрим на любые два соседних столбика. Сумма чисел в них различается либо на k, либо на $k-12s$ (где s — количество таких циферблатов, для которых в одном столбике 12, а в следующем — 1). При $k=1,2,\ldots,11$ все эти разности не кратны 12, а при $k=12$ становятся кратны 12.

20. Ответ. Не хватит.

Решение. Положение каждого движущегося человека характеризуется отрезком улицы между площадями (их $2\cdot 10\cdot 9=180$) и направлением движения — итого 360 положений. Каждая аптека использует 36 положений (т. е. в 36 положениях эта аптека будет аптекой шаговой доступности, а человек будет идти к ней). Итого, если не учитывать краевых соображений, впритык хватает 10 аптек.

Но посчитаем края. Пусть человек идёт к угловому перекрёстку. Пусть этот перекрёсток восточный южный, а человек идёт по самой восточной улице на юг, и ему до угла остаётся менее 1 км. Тогда он приближается к аптеке, только если эта аптека находится на самой южной улице и в пределах 3 км от самой восточной улицы. Аналогично должна быть аптека на самой восточной улице близ южной улицы. (Эти аптеки могут совпадать, они если в углу). В любом случае на краешки теряется не менее 24 положений на каждом углу. Итого 12 аптек контролируют максимум $36\cdot 12\cdot 4\cdot 24<360$ положений, так что этих аптек не хватит.

21. Ответ: 37 (18 налево, 12 направо, 7 прямо).

Оценка: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{31}{30}$. Если всего было человек, то $\frac{1}{30}\cdot$ приходится на погрешность. Сосчитаем максимальную погрешность (в долях человека): $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{37}{30}$. Значит, $\frac{37}{30}\geqslant\frac{1}{30}$, откуда $x\leqslant 37$.

7 класс

23. Предположим противное. Тогда, если из метро полностью исключить отмеченную станцию и её правого соседа с перегонами к ним, то маршрут поезда не изменится (так как если он заезжал на какой-то из удалённых перегонов, то он проезжал через отмеченную станцию). Оставшиеся станции можно однозначно покрасить в 2 цвета так, чтобы никакие две станции одного цвета не были соединены перегоном. Тогда заметим, что каждую минуту поезд переезжает со станции одного цвета на станцию другого. То есть, если сначала он стоял на станции цвета №1, то через минуту — на станции цвета №2, через две — №1 и т.д. Получается, что через чётное количество минут поезд окажется на станции того же цвета, что и первоначальная. Но станции A и B разных цветов. Противоречие.

24. Очевидно, складывали два пятизначных числа. Причём меняли последнюю цифру и ещё какую-то (назовём этот разряд счастливым). Значит, сумма цифр в последнем и счастливом разрядах оканчивается на 1. Пусть счастливый разряд предпоследний. Тогда сумма цифр в последних двух разрядах должна быть 1 (если 11, то на предпоследнем месте суммы будет 2 за счёт переноса). Но тогда нет переноса с предпоследнего разряда на предпредпоследний, а это плохо, так как тогда можно выкинуть эти два разряда, и получится, что сумма одинаковых чисел равна 1111. Итак, счастливый разряд не предпоследний. На тогда в счастливый разряд не должно быть переноса, а тогда за ним стоят два (одинаковых) числа, в сумме дающие 0. Значит, в разряде, следующем за счастливым, должен стоять ноль.

25. Ответ: нет.
Пример набора длин палочек:
2, 3, 4
20, 30, 40
200, 300, 400
2000, 3000, 4000
20000, 30000, 40000

26. Построим отрезок KM и продлим его до пересечения с BC (точка X). Заметим, что в треугольнике KBX BM является высотой и биссектрисой (по условию угол BMK прямой, а углы KBM и MBC равны). Значит, треугольник KBX равнобедренный и $BK = BX$. Из этого следует, что $KM = MX$ (BM должна быть и медианой). Но в таком случае треугольники AMK и CMX равны (углы AMK и CMX вертикальные, $AM = MC$ по условию, $KM = MX$ по доказанному). Тогда $AK = XC$. То есть $BC = BX + XC = BK + AK$.

27. Ответ: c=1, a=1, b=2; c=1, a=2, b=1; c=1, a=2, b=2; c=a=b —

любые.

Положим, что $a \geqslant b$. Тогда существуют три варианта:

Вариант 1: $c > a$.

Тогда $(a+b)c! = (a+b)a! \cdot x \cdot c > 2 \cdot a! \cdot x \cdot c \geqslant (a!+b!)c$ (кроме случая $a = b = 1$, $c = 2$).

Вариант 2: $c < a$.

Тогда $(a!+b!)c > a!c = a \cdot x \cdot c! \cdot c >= 2 \cdot a \cdot c! \geqslant (a+b)c!$ (кроме случая $c = 1$, для него $a! + b! = a + b$, откуда $a, b = 1$ или 2, но $c < a$, значит $c = 1 = b$, $a = 2$ или $c = 1$, $a = b = 2$).

Вариант 3: $c = a$

Тогда $(a+b)a! = (a!+b!)a$, раскроем скобки, получим $a \cdot a! + b \cdot a! = = a! \cdot a + b! \cdot a$, откуда $b \cdot a! = b! \cdot a$, поделив на ab получаем: $(a-1)! = (b-1)!$, то есть $a = b = c$.

28. Разбиваем на тройки подряд лежащих монет. В каждой тройке либо орлов больше, чем решек, либо наоборот. Пусть в пяти тройках орлов больше. Ассистент закрывает по одной монете из этих троек, а фокусник угадывает ещё по одной монете из этих троек. Договорённость может быть такой: если орлами лежат две левые монеты в тройке, то ассистент открывает левую (фокусник знает, что вторая — средняя), если две правые — среднюю (фокусник знает, что вторая — правая), если две крайние — правую.

8 класс

29. Ответ: 48 и 52.

Цена в 64 рубля не могла оба раза оказаться в одном и том же магазине, значит для магазина «Пекарь Плюс» существует всего два варианта цен — 64 и 72, или 64 и 70. Рассмотрим первый вариант: во второй день оптовая цена оказалась на 8 рублей больше. Пусть «Звезда» увеличивает цену в раз, тогда во второй день цена на пироги должна быть на 8 больше, но разница составляет всего 6 рублей - противоречие. Рассмотрим второй вариант: оптовая цена увеличилась на 6 рублей. 6x=8, следовательно, $=\frac{4}{3}$. Значит, оптовая цена была равна 48 рублям в первый день и 52 во второй.

30. Ответ: $p = 17$, $q = 3$.

Посмотрим на остатки при делении на 3, получим $p^2+q^2 \equiv 1 \pmod 3$, это возможно только если одно из чисел равно 3.

Пусть $q = 3$, получаем квадратное уравнение: $p^2 - 18p + 17 = 0$. Получается, $p = 1$ или 17. 1 не простое, следовательно $p = 17$.

Пусть $p = 3$, тогда $q^2 - 15q + 8 = 0$. решения этого уравнения не целые, а значит нам не подходят.

31. PQ — общая хорда вписанной окружности и окружности AIC, поэтому она перпендикулярна IZ, где Z — центр окружности AIC. Значит, $IZ \perp AC$. А поскольку $ZA = AC$, получаем, что I лежит на серпере к AC. Отсюда следует равнобедренность.

32. Каждый знаком как минимум с 10 людьми. Всего у нас 900 000 человек верят в Деда Мороза, они имеют как минимум 8 100 000 знакомств с теми, кто в него не верит. Всего 100 000 человек не верят в деда мороза, следовательно, среди них найдется тот, у кого хотя бы 81 знакомый в него верит, следовательно, у него хотя бы 810 знакомых.

33. Ответ: при любых.

Пример: раскрасим сначала квадрат в n цветов так, чтобы клетки одинаковых цветов располагались на диагоналях. Возьмем левую верхнюю клетку, она будет первого цвета. Перекрасим ее в $(n+1)$-й цвет, сдвинемся на 2 клетки вправо и на одну вниз- мы окажемся на клетке второго цвета, перекрасим и ее, и так далее. Если n нечетное, то дойдя до правого края доски, мы перескочим на второй столбец, снова перейдя на новый цвет, затем спокойно дойдем до нижней строки и окажемся в предпоследнем столбце. Выкинем последнюю перекрашенную клетку — пример готов. Если n четное, то повторив нашу операцию около правого края доски, мы окажемся на первом столбце, поэтому сдвинемся еще на одну клетку вправо. Далее повторяем операцию до тех пор, пока не придем в правый нижний угол, его мы не трогаем. После этого мы получили, что клеток каждого цвета не меньше, чем $n-1$, но одного из цветов — n клеток. Выкинем произвольную клетку этого цвета.

34. Ответ: годится, например, любое N вида $4k^4 - 8k^2 + 2$.

Тогда

$$x^8 + (4k^4 - 8k^2 + 2)x^4 + 1 = \\ = (x^4 - 2kx^3 + 2k^2x^2 - 2kx + 1)(x^4 + 2kx^3 + 2k^2x^2 + 2kx + 1).$$

35. Ответ: 30

Пример: Пойдем обратным ходом — будем складывать из двух кучек одну без нарушения условий задачи. Пусть сначала были кучки (каждого вида по две): $15, 15, 16, 16, \ldots, 29, 29$. Легко видеть, что условие не нарушается, а сумма равна 660. Сложим две самые маленькие кучки (по 15), затем снова самые маленькие (по 16) и так далее до кучек по

29. На каждом шагу минимальная кучка меньше чем в два раза меньше максимальной. В итоге у нас есть 15 кучек: $30, 32, \ldots, 58$. Продолжим на каждом шаге складывать по две самые маленькие кучки. Через семь операций у нас будет: $58, 62, 70, 78, 86, 94, 102, 110$. Делаем то же самое еще четыре раза: $120, 148, 180, 212$. И еще два: $268, 392$. Наконец, завершаем путь, получив кучку размера 660. Решение задачи получается, если произвести проделанные операции в обратном порядке.

Оценка: Пусть мы разбили первоначальную кучу на максимально возможное количество кучек. Пусть минимальная из них равна m, тогда все они меньше $2m$. Рассмотрим этот процесс в обратном порядке, то есть, будем складывать какие-то две кучки из имеющихся, чтобы получить какую-то новую кучку.

Заметим, что если в данный момент минимум равен m, то очередное полученное число окажется не более $2m$, а после того, как мы получили число $2m$, не могут еще оставаться числа, равные m. То есть после каждого восстановления минимум увеличивается. В частности, это означает, что после k операций минимум возрастает не меньше, чем на k. Следовательно, в исходном наборе было не более, чем $2k$ чисел из полуинтервала $[m, m+k)$.

Таким образом, если упорядочить по возрастанию числа исходного набора, то первое число будет не более m, третье число не более $m+1$, пятое число не более $m+2$, и так далее. Таким образом, если $m > 15$, то уже первые 30 чисел в сумме дадут как минимум $15 \cdot (16+30) > 660$, а если $m < 15$, то в полуинтервале $[m, 2m)$ меньше 15 позиций и, следовательно, из этого полуинтервала в множестве присутствуют менее 30 чисел (а вне этого полуинтервала чисел вовсе нет).

9 класс

36. Из условия сразу следует, что AN и CM являются биссектрисами треугольника ABC, и поэтому проходят через центр вписанной окружности. Обозначим вторую точку пересечения AN с вписанной окружностью за P', BM с вписанной окружностью за Q'. Тогда PP' и QQ' – диаметры вписанной окружности. Поэтому $PQP'Q'$ — прямоугольник, и $P'Q' = PQ$. Поскольку точки M и N по построению лежат вне треугольника ABC, а точки P' и Q' внутри, точки M и N лежат на лучах IP' и IQ' дальше, чем точки P и Q, соответственно. Поэтому $MN > P'Q' = PQ$.

37. PQ — общая хорда вписанной окружности и окружности AIC, поэтому она перпендикулярна IZ, где Z — центр окружности AIC. Значит, $IZ \perp AC$. А поскольку $ZA = AC$, получаем, что I лежит на серпере к AC. Отсюда следует равнобедренность.

38. Заметим, что CI — биссектриса угла PCQ. Действительно, $PI = IQ$, откуда точка I лежит на середине дуги PQ описанной вокруг треугольника AIC окружности. Обозначим за T точку пересечения прямых AP и CQ. По теореме Фалеса искомая параллельность равносильна равенству $TL/TP = TS/TQ$. По свойству биссектрис $TL/TP = TC/PC$ и $TS/TQ = TA/QA$. Но треугольники TPC и TQA подобны по трем углам (углы, дополнительные к углам $\angle TPC$ и $\angle TQA$, опираются на дугу AC), откуда $TC/PC = TA/QA$.

39. Заметим, что центр описанной окружности AIC — это середина дуги AC описанной окружности ABC (это в точности лемма о трилистнике). Поэтому IZ — биссектриса угла B. Но, как мы доказали в пункте 2, $PQ \perp IZ$, значит, $PQ \perp BI$. Но MN тоже перпендикулярна BI, так как треугольники MBI и NBI равнобедренные (с общим основанием BI) по лемме о трилистнике. Значит, $PQ \parallel MN$.

40. Поскольку $2xy \leqslant x^2 + y^2$, получаем

$$\frac{x^2}{x^2+2yz} + \frac{y^2}{y^2+2zx} + \frac{z^2}{z^2+2xy} \geqslant \\ \geqslant \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2} = 1.$$

41. Преобразуем левую часть с использованием $2xy \leqslant x^2 + y^2$, домножив числитель и знаменатель на 2:

$$\frac{x^2+2y^2+2z^2}{x^2+yz} + \frac{y^2+2z^2+2x^2}{y^2+zx} + \frac{z^2+2x^2+2y^2}{z^2+xy} \geqslant \\ \geqslant 2\left(\frac{x^2+2y^2+2z^2}{2x^2+y^2+z^2} + \frac{y^2+2z^2+2x^2}{2y^2+z^2+x^2} + \frac{z^2+2x^2+2y^2}{2z^2+x^2+y^2}\right) \geqslant \\ \geqslant 2\left(\frac{x^2+y^2+2z^2}{2x^2+y^2+z^2} + \frac{y^2+z^2+2x^2}{2y^2+z^2+x^2} + \frac{z^2+x^2+2y^2}{2z^2+x^2+y^2}\right).$$

Теперь применим к выражению в скобках транснеравенство (для числителей и обратных к знаменателям):

$$2\left(\frac{x^2+y^2+2z^2}{2x^2+y^2+z^2}+\frac{y^2+z^2+2x^2}{2y^2+z^2+x^2}+\frac{z^2+x^2+2y^2}{2z^2+x^2+y^2}\right)\geqslant$$
$$\geqslant 2\left(\frac{y^2+z^2+2x^2}{2x^2+y^2+z^2}+\frac{z^2+x^2+2y^2}{2y^2+z^2+x^2}+\frac{x^2+y^2+2z^2}{2z^2+x^2+y^2}\right)=6.$$

42. Решение. Обозначаем $a=x\sqrt{xz}$, $b=y\sqrt{yx}$, $c=z\sqrt{zy}$ и подставляем в неравенство первого пункта (взятое для переменных a, b, c). Получаем

$$\frac{(x\sqrt{xz})^2}{(x\sqrt{xz})^2+2y\sqrt{yx}\cdot z\sqrt{zy}}+\frac{(y\sqrt{yx})^2}{(y\sqrt{yx})^2+2z\sqrt{zy}\cdot x\sqrt{xz}}+$$
$$+\frac{(z\sqrt{zy})^2}{(z\sqrt{zy})^2+2x\sqrt{xz}\cdot y\sqrt{yx}}\geqslant 1$$

$$\frac{x^3z}{x^3z+2y^2\sqrt{x}\cdot z\sqrt{z}}+\frac{y^3x}{y^3x+2z^2\sqrt{y}\cdot x\sqrt{x}}+\frac{z^3y}{z^3y+2x^2\sqrt{z}\cdot y\sqrt{y}}\geqslant 1$$

$$\frac{x^3}{x^3+2y^2\sqrt{zx}}+\frac{y^3}{y^3+2z^2\sqrt{xy}}+\frac{z^3}{z^3+2x^2\sqrt{yz}}\geqslant 1$$

43.

Решение. Разделим первую дробь на z^3, вторую на x^3, третью на z^3 и обозначим $\frac{x}{z}=a$, $\frac{y}{x}=b$, $\frac{z}{y}=c$. Тогда первая дробь преобразуется (с учетом тождества $abc=1$) следующим образом:

$$\frac{x^3}{x^3+2y^2z}=\frac{a^3}{a^3+\frac{2}{c^2}}=\frac{a^3}{a^2+2a^2b^2}=\frac{a}{a+2b^2}.$$

Применяя аналогичные преобразования к остальным дробям, сведем исходное неравенство к следующему:

$$\frac{a}{a+2b^2}+\frac{b}{b+2c^2}+\frac{c}{c+2a^2}\geqslant 1.$$

Произведем над ним следующие эквивалентные преобразования (применяя в конце тождество $abc=1$):

$$\frac{a}{a+2b^2}+\frac{b}{b+2c^2}\geqslant\frac{2a^2}{c+2a^2};$$

$$\frac{a(b+2c^2)+b(a+2b^2)}{(a+2b^2)(b+2c^2)} \geqslant \frac{2a^2}{c+2a^2};$$

$$(2ab+2ac^2+2b^3)(c+2a^2) \geqslant 2a^2(ab+2ac^2+2b^3+4b^2c^2);$$

$$abc+ac^3+b^3c+2a^3b+2a^3c^2+2a^2b^3 \geqslant a^3b+2a^3c^2+2a^2b^3+4a^2b^2c^2;$$

$$1+ac^3+b^3c+a^3b \geqslant 4;$$

$$\frac{ac^3+b^3c+a^3b}{3} \geqslant 1.$$

Последнее сразу следует из неравенства о средних: $\frac{1}{3}(ac^3+b^3c+a^3b) \geqslant \geqslant \sqrt[3]{a^4b^4c^4} = 1$.

44. Рассмотрим два числа x и y, которые получились после первого шага. Будем считать, что $x \geqslant y$, тогда $x \leqslant \sqrt{2}y$. Более того, поскольку $\sqrt{2}$ иррационален, то $x < \sqrt{2}y$. Давайте убедимся, что следующий ход сделать уже не получится. Действительно, пусть мы разделили x на x_1 и x_2 ($x_1 + x_2 = x$). Пусть $x_1 \leqslant x_2$, тогда $x_1 \leqslant \frac{x}{2} < \frac{y}{\sqrt{2}}$, что противоречит условию «похожести». Разделить y тем более не получится.

45. Рассмотрим обратный процесс: будем считать, что изначально у нас есть несколько кучек и мы можем брать две кучки и соединять их вместе, соблюдая правило похожести размеров. Теперь нам надо убедиться, что из n единичных кучек можно таким образом составить одну кучку размера n. Сделаем это так: будем просто каждый раз брать две наименьших куска и объединять их. Тогда получится, что каждая вновь образованная кучка будет оказываться максимальной. При этом если мы объединяем две кучки размера x и y ($x < y$), то получается кучка размера $x + y \leqslant 2y$, тогда как все остальные кучки будет размером не менее y. Таким образом, условие похожести размеров будет постоянно соблюдаться и в конечном счете получится кучка размера n.

46. Пойдем обратным ходом — будем складывать из двух кучек одну без нарушения условий задачи. Пусть сначала были кучки (каждого вида по две): 15, 15, 16, 16, …, 29, 29. Легко видеть, что условие не нарушается, а сумма равна 660. Сложим две самые маленькие кучки (по 15), затем снова самые маленькие (по 16) и так далее до кучек по 29. На каждом шагу минимальная кучка меньше чем в два раза меньше максимальной. В итоге у нас есть 15 кучек: 30, 32, …, 58. Продолжим на каждом шаге складывать по две самые маленькие кучки. Через семь операций у нас будет: 58, 62, 70, 78, 86, 94, 102, 110. Делаем то же самое еще четыре раза: 120, 148, 180, 212. И еще два: 268, 392. Наконец, завершаем путь, получив кучку размера 660. Решение задачи получается, если произвести проделанные операции в обратном порядке.

47. Пусть мы разбили первоначальную кучу на максимально возможное количество кучек. Пусть минимальная из них равна m, тогда все они меньше $2m$. Рассмотрим этот процесс в обратном порядке, то есть, будем складывать какие-то две кучки из имеющихся, чтобы получить какую-то новую кучку. Заметим, что если в данный момент минимум равен m, то очередное полученное число окажется не более $2m$, а после того, как мы получили число $2m$, не могут еще оставаться числа, равные m. То есть после каждого восстановления минимум увеличивается. В частности, это означает, что после k операций минимум возрастает не меньше, чем на k. Следовательно, в исходном наборе было не более, чем $2k$ чисел из полуинтервала $[m,\ m+k)$. Таким образом, если упорядочить по возрастанию числа исходного набора, то первое число будет не более m, третье число не более $m+1$, пятое число не более $m+2$, и так далее. Таким образом, если $m > 15$, то уже первые 30 чисел в сумме дадут как минимум $15 \cdot (16+30) > 660$, а если $m < 15$, то в полуинтервале $[m,\ 2m)$ меньше 15 позиций и, следовательно, из этого полуинтервала в множестве присутствуют менее 30 чисел (а вне этого полуинтервала чисел вовсе нет).

10 класс

48. PQ — общая хорда вписанной окружности и окружности AIC, поэтому она перпендикулярна IZ, где Z — центр окружности AIC. Значит, $IZ \perp AC$. Так как $ZA = AC$, то получаем, что I лежит на серпере к AC. Отсюда следует равнобедренность.

49. Искомая параллельность равносильна равенству $\frac{DX'}{X'X} = \frac{DY'}{Y'Y}$ (теорема Фалеса). По свойству биссектрисы, $\frac{DX'}{X'X} = \frac{DF}{FX}$, $\frac{DY'}{Y'Y} = \frac{DE}{EY}$. Но треугольники DEY и DFX подобны по трём углам (один общий и равные вписанные), поэтому соответствующие отношения равны.

50. Заметим, что центр описанной окружности AIC — это середина дуги AC описанной окружности ABC (это в точности лемма о трилистнике). Поэтому IZ — биссектриса угла $\angle B$. Но как мы доказали в пункте (1) $PQ \perp IZ$, значит, $PQ \perp BI$. Но MN тоже перпендикулярна BI, так как треугольники MBI и NBI равнобедренные (с общим основанием BI) по лемме о трилистнике. Значит, $PQ || MN$.

51. Пусть S — точка пересечения прямых CT и AI, а L — прямых AT и CI. Заметим, что I — середина дуги PQ в окружности AIC, так как $PI = IQ$. Тогда CI — биссектриса угла PCQ, AI — биссектриса угла PAQ, и мы видим в точностью картинку из пункта (2). Таким образом, $PQ||LS$. Комбинируя это с утверждением пункта (3) ($MN||PQ$) получаем, что треугольники MNI и TPQ перспективны относительно LS. Пользуясь обратной теоремой Дезарга получаем, что прямые IT, MP и NQ пересекаются в одной точке. Но так как прямые MP и NQ пересекаются в точке K, это ровно и значит, что I, T и K лежат на одной прямой.

52. Ответ: $P = 5$. Заметим, что по первой строке однозначно определяются остатки остальных строк:

1	2	...	P-1
P-1	P-2	...	1
0	0	...	0
1	2	...	P-1
P-1	P-2	...	1
0	0	...	0

Далее будут повторяться первые три строки. Поскольку нулевых остатков должно быть ровно $P-1$, то P не может быть больше 5. Нетрудно заметить, что среди $P \leqslant 5$ подходит только $P = 5$.

53. Обозначим число в углу за x. Тогда его сосед из второй строчки $3x$ (здесь и далее по модулю 7). Теперь можно получить соседа из первой строчки: он равен $-2x \equiv 5x$, а его сосед из второй строчки $3 \cdot 5x \equiv x$. Далее из условия на сумму мы получаем очередное число первой строки, из доп. условия второго пункта – очередное число второй строки. После заполнения первых двух строк остальные строки заполняется однозначно:

x	$5x$	$3x$	$3x$	$5x$	x
$3x$	x	$2x$	$2x$	x	$3x$
x	$5x$	$3x$	$3x$	$5x$	x
0	0	0	0	0	0

54. Докажем по индукции по номеру строки i. Будем доказывать два утверждения:

$P(i)$ – то, что требуется доказать по условию,
$Q(i)$ – существует число r_i такое, что после домножения на него первой строки числа будут давать такие же остатки при делении на P, что и i-я строка (соответственно).

Для удобства работы с границей добавим нулевые строки и столбцы по краям.

База: $i = 1$. $Q(i)$ верно, т.к. можем взять $r_i = 1$. $P(i)$ верно, т.к. соседи x по столбцу – 0 и Kx (по условию).

Переход: Пусть y – произвольное число из $i+1$ строчки, x, z, w - его соседи (могут быть крайними нулями). Обозначим за a, b, c числа первой строки из тех же столбцов и воспользуемся сначала $Q(i)$ и $Q(i-1)$ (рис. слева), после чего $P(i)$ (рис. справа):

ma	mb	mc
la	lb	lc
x	y	z
	w	

ma	mb	mc
la	lb	lc
$(Kl-m)a$	$(Kl-m)b$	$(Kl-m)c$
	w	

Заметим, что мы получили выполнение $Q(i+1)$ для y.

Запишем условие суммы для lb и $(Kl-m)b$:

$lb - la - lc \equiv mb + (Kl-m)b \Leftrightarrow l(b-a-c) \equiv Klb$

$(Kl-m)b-(Kl-m)a-(Kl-m)c \equiv w+lb \Leftrightarrow (Kl-m)(b-a-c) \equiv w+lb$

При $l \not\equiv 0$ из этого следует выполнение $P(i+1)$ для y, т.к. $w + lb \equiv K(Kl-m)b$.

При $l \equiv 0$ вся строчка равна нулю, и следующая часть таблицы будет антисимметрична предыдущей, а тогда для нее $P(i+1)$ тоже выполняется.

55. Предыдущие пункты намекают, что осмысленно рассматривать таблицы со строчками, получающимися из первой умножением на число.

Причем для задания расстановки достаточно выбрать первое число и первый множитель. Выберем число 1 и множитель 3.

Тогда расстановку чисел таблицы можно задать следующей формулой:

$a_{i,j} = (-1)^{j+1}jF_i$, где F_i задается рекуррентным соотношением $F_0 = 0, F_1 = 1, F_i = 3F_{i-1} - F_{i-2}$

Замечание: для любознательных читалей стоит заметить, что это числа Фибоначчи с четными номерами.

Проверим условие суммы:

$a_{i,j} \equiv a_{i-1,j} + a_{i+1,j} + a_{i,j-1} + a_{i,j+1} \Leftrightarrow$

$(-1)^{j+1}jF_i \equiv (-1)^{j+1}jF_{i-1}+(-1)^{j+1}jF_{i+1}+(-1)^{j}(j-1)F_i+(-1)^{j+2}(j+1)F_i \Leftrightarrow$

$(-1)^{j+1}F_i(j+j-1+j+1) \equiv (-1)^{j+1}j(F_{i-1}+F_{i+1}) \Leftrightarrow$

$3F_i \equiv F_{i-1}+F_{i+1}$ – верно.

Второе необходимое условие – чтобы всех остатков в таблице было поровну. Это будет выполняться не при всех P.

Поймем, что достаточным условием является $F_i \equiv 0$ при $i = (P+1)/2$ (т.е. центральная строчка состоит из нулей) и $F_i \not\equiv 0$ для остальных строчек.

Действительно, первая строчка $(-1)^{j+1}j$ дает половину ненулевых остатков (каждого по два), а последняя строчка антисимметрична ей, т.е. дает остальные ненулевые остатки (тоже по два). Это свойство не меняется при домножении на ненулевое число, поэтому в остальных парах строчек тоже поровну ненулевых остатков.

Осталось проверить, что при $P = 23$ последовательность F_i удовлетворяет условию. Это можно сделать как непосредственным вычислением (остатки $1\ 3\ 8\ -2\ 9\ 6\ 9\ -2\ 8\ 3\ 1\ 0$), так и воспользовавшись полезными знаниями про числа Фибоначчи.

56. Рассмотрим два числа x и y, которые получились после первого шага. Будем считать, что $x \geqslant y$, тогда $x \leqslant \sqrt{2}y$. Более того, поскольку $\sqrt{2}$ иррационален, то $x < \sqrt{2}y$. Давайте убедимся, что следующий ход сделать уже не получится. Действительно, пусть мы разделили x на x_1 и x_2 ($x_1 + x_2 = x$). Пусть $x_1 \leqslant x_2$, тогда $x_1 \leqslant \dfrac{x}{2} < \dfrac{y}{\sqrt{2}}$, что противоречит условию «похожести». Разделить y тем более не получится.

57. Рассмотрим обратный процесс: будем считать, что изначально у нас есть несколько кучек и мы можем брать две кучки и соединять их вместе, соблюдая правило похожести размеров. Теперь нам надо убедиться, что из n единичных кучек можно таким образом составить одну кучку размера n.

Сделаем это так: будем просто каждый раз брать две наименьших куска и объединять их. Тогда получится, что каждая вновь образованная кучка будет оказываться максимальной. При этом, если мы объединяем две кучки размера x и y ($x \leqslant y$), то получается кучка размера $x+y \leqslant 2y$, тогда как все остальные кучки будет размером $\geqslant y$. Таким образом, условие похожести размеров будет постоянно соблюдаться и в конечном счёте получится кучка размера n.

58. Пусть, начав с некого числа мы получили некое мультимножество A, минимум которого равен m. Тогда все его элементы $< 2m$.

Пустим процесс в обратном направлении, попытаемся получить исходное число из множества A. Первым ходом мы скомбинируем два числа, которые оба $\geqslant m$, и получим некую сумму $x \geqslant 2m$. Теперь максимум $\geqslant 2m$, а значит, минимум $\geqslant \dfrac{2}{k}m$. То есть, минимум возрос не менее, чем в $\dfrac{2}{k}$ раз.

Так он будет возрастать после каждого хода и через $[\log_{\frac{2}{k}}(2)]+1$ ходов превысит $2m$. При этом на каждом ходу мы убирали максимум 2 числа из мультимножества A, и в итоге оно всё изчезло (поскольку все его элементы были $< 2m$). Значит, в нём было не больше, чем $2([\log_{\frac{2}{k}}(2)]+1)$ элементов.

59. Ответ: 30. В качестве этих 30 кучек можно получить набор: $15, 15, 16, 16, \ldots, 29, 29$. Мы можем восстановить исходное число таким же образом, как во 2 пункте сюжета.

Теперь докажем, что больше 30 кучек сделать не получится.

Рассмотрим максимальное количество кучек, которое могло в конце концов получиться. Пусть минимальная из них равно m, тогда все они $< 2m$. Давайте рассмотрим этот процесс в обратном порядке, то есть, будем складывать какие-то две кучки из имеющихся, чтобы получить какую-то новую кучку.

Заметим, что если в данный момент минимум равен m, то очередное полученное число окажется $\geqslant 2m$, а после того, как мы получили число $2m$, не могут ещё оставаться числа, равные m. То есть, после каждого восстановления минимум увеличивается.

В частности, это означает, что после k операций минимум возрастает не меньше, чем на k. Следовательно, в исходном наборе было не более, чем $2k$ чисел из полуинтервала $[m, m+k)$.

Таким образом, если упорядочить по возрастанию числа исходного набора, то первое число будет $\geqslant m$, третье число $\geqslant m+1$, пятое число $\geqslant m+2$, и так далее. Таким образом, если $m > 15$, то уже первые 30 чисел будут в сумме как минимум $15 \cdot (16+30) > 660$, а если $m < 15$, то в полуинтервале $[m, 2m)$ меньше 15 позиций, и, следовательно, из этого полуинтервала в множестве присутствуют < 30 чисел (а вне этого полуинтервала чисел вовсе нет).

11 класс

60. Заметим, что по свойствам биссектрис для точек K и L выполняется $\dfrac{AL}{LC} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AK}{KC}$. Так как TL биссектриса треугольника ATC, то $\dfrac{AT}{TC} = \dfrac{AL}{LC} = \dfrac{AK}{KC}$. Что означает, что TK — внешняя биссектриса треугольника ATC (по свойству внешней биссектрисы).

На самом деле w_2 — окружность Аполлония для точек A и C и соотношения $\dfrac{AB}{BC}$. Из чего очевидно следует утверждение задачи.

61. Рассмотрим точку пересечения прямой BH и окружности w_1, назовём её X и докажем, что она лежит на w_2. Пусть α, β, γ — углы треугольника ABC. Тогда $\angle HAC = 90^\circ - \gamma$, а $\angle AHX = \gamma$. Так как $AHCX$ — вписанный четырёхугольник, то $\angle ACX = \angle AHX = \gamma$. Аналогично получаем, что $\angle CAX = \alpha$. Значит, $\triangle ABC = \triangle AXC$, а X симметрична B относительно прямой AC.

Окружность w_2 тоже симметрична относительно прямой AC и содержит точку B. Следовательно, точка X тоже лежит на окружности w_2.

62. Рассмотрим P — точку пересечения медианы BM и окружности w_1. Заметим, что окружность w_1 симметрична относительно серединного перпендикуляра к AC. Значит, точка P' — образ P при симметрии относительно серединного перпендикуляра к AC — тоже лежит на окружности w_1. Кроме того, в силу симметрии P' лежит на прямой XM. Так как четырёхугольник $AP'CM$ вписанный, $\triangle AP'M \sim \triangle XCM$ и $\triangle AXM \sim \triangle P'CM$. Отсюда получаем

$$\frac{AP'}{XC} = \frac{P'M}{CM} = \frac{P'M}{AM} = \frac{P'C}{AX}.$$

Значит, $\dfrac{AP'}{P'C} = \dfrac{XC}{AX} = \dfrac{BC}{AB}$. В силу симметрии это означает, что $\dfrac{AP}{PC} = \dfrac{AB}{BC}$, что означает, что P лежит на аполлониевой окружности w_2, а значит, совпадает с точкой Y.

63. По доказанному ранее, точка пересечения Y окружности w_1 с медианой лежит на w_2, с другой стороны, середина U отрезка KL — это центр окружности w_2. Таким образом надо доказать, что радиус UK окружности w_2 — касательная к w_1, т.е., что w_1, w_2 ортогональны. Как известно, $w_1 \perp w_2$ равносильно (при $w_1 \neq w_2$) тому, что w_2 неподвижна при инверсии относительно w_1. Достаточно проверить, что какая-то из точек w_2 (не лежащих на w_1) перейдёт в точку на w_2 при инверсии относительно w_1. Обозначим за O — центр окружности w_1. Рассмотрим точку L и инверсную ей точку L', тогда

$$\angle AL'L = \angle OAL = \angle OCL = \angle OL'C$$

Таким образом, $L'L$ — биссектриса $AL'C$, т.е. $AL'/L'C = AL/LC$ и L' лежит на аполлониевой окружности w_2.

По доказанному ранее, точка пересечения Y окружности w_1 с медианой лежит на w_2, с другой стороны, середина U отрезка KL — это центр окружности w_2. Таким образом надо доказать, что радиус UK окружности w_2 — касательная к w_1, т.е., что w_1, w_2 ортогональны. Как известно, $w_1 \perp w_2$ равносильно (при $w_1 \neq w_2$) тому, что w_2 неподвижна при инверсии относительно w_1. Достаточно проверить, что какая-то из точек w_2 (не лежащих на w_1) перейдёт в точку на w_2 при инверсии относительно w_1. Обозначим за O — центр окружности w_1. Рассмотрим точку L и инверсную ей точку L', тогда

$$\angle AL'L = \angle OAL = \angle OCL = \angle OL'C$$

Таким образом, $L'L$ — биссектриса $AL'C$, т.е. $AL'/L'C = AL/LC$ и L' лежит на Аполлониевой окружности w_2.

64. Ответ: нет.

Например, $A_x = A_{x^3}$.

65. Ответ: 4.

Например, рассмотрим многочлен $P(x) = (x-3)(x-1)(x+1)(x+3)$. Он чётный. Следовательно, если $c \neq P(0)$, то $l_P(c)$ чётно. Следовательно, в A может быть только одно нечётное число, а именно, $l_P(P(0))$. Таким образом, $b = 1$ или $b = 3$ является искомым числом, поскольку $0, 4 \in A_P$. Почему степень не может быть меньше? Рассмотрим, например, кубический многочлен P. Поскольку его производная — квадратный многочлен, то у неё есть не более двух корней, а значит, у P не более трёх участков монотонности, а точнее, 1 или 3. Рассмотрим сразу самый сложный случай — когда у P три участка монотонности. Пусть у него есть локальный минимум m и локальный максимум M. Тогда для $x \in (-\infty, m) \cup (M, +\infty)$ $l_P(x) = 1$, $l_P(m) = l_P(M) = 2$ и для $x \in (m, M)$ $l_P(x) = 3$. Остальные случаи разбираются ещё проще.

66. Возьмем c, реализующее максимум. Если есть точки касания, слегка (не доходя до следующей точки касания) подвинем c в ту сторону, с которой точек касания больше (то есть, увеличим, если локальных минимумов больше, и наоборот). Тогда точек касания не станет, а количество общих точек с многочленом не уменьшилось. То есть, после сдвига наша прямая по-прежнему дает максимум. Без точек касаний число точек пересечения соответствует четности функции (а значит, одной четности с минимумом $0/1$).

67. Ответ: одно нечётное число.

Докажем, что не может быть только чётных чисел. Рассмотрим многочлен P степени 8. У многочлена степени 8 нечётное количество точек смен монотонности. Введём обозначение: B_c — это множество точек x, таких что $P(x) = c$ и многочлен P меняет монотонность в этой точке. Поскольку точек смен монотонности нечётное количество, то $|B(c)|$ нечётно для какого-то c. Легко заметить, что тогда $l_P(c)$ нечётно.

Таким образом, в A_P есть хотя бы одно нечётное число. Продемонстрируем пример, когда ровно одно. Подходит, напимер, многочлен $P(x) = (x-3)^2(x-1)^2(x+1)^2(x+3)^2$. Он чётный, поэтому для любых c, кроме $c = P(0)$, значение $l_P(c)$ будет чётным.