Олимпиада Юношеской математической школы
II тур. 6 декабря 2015 года
9 класс

Сюжет 1.

Натуральные числа раскрашены в несколько (возможно, бесконечно много) цветов. Будем называть раскраску чисел очаровательной, если для любых натуральных чисел a и b среди чисел a, b и a+b встречается ровно одна одноцветная пара.

Натуральные числа покрасили очаровательно.

1.1. Докажите, что среди чисел 1, 3, 9 есть одноцветные.

1.2. Докажите, что среди четырёх последовательных чисел обязательно найдутся два одноцветных.

Сюжет 2.

Дан произвольный набор целых чисел. Обозначим через c_k сумму их k-ых степеней.

2.1. Из последовательности c_k выделили три различных числа, образующих арифметическую прогрессию. Докажите, что в исходном наборе есть числа разных знаков.

2.2. Возможно ли, что $c_3 = 1$, $c_5 = 2015$?

Сюжет 3.

Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает отрезок BC и луч AB в точках D и E соответственно. Точки M и N — середины отрезков AC и DE соответственно.

3.1. Оказалось, что $\angle BAC = 2\angle BCA$. Докажите, что $DM \le DB$.

3.2. Докажите, что $\angle ABC + \angle MBN = 180°$, если $AB = BE$.

Олимпиада Юношеской математической школы
II тур. 6 декабря 2015 года
9 класс. Выводная аудитория

Сюжет 1.

1.3. Приведите пример очаровательной раскраски, в которой среди чисел 6, 10 и 15 нет одноцветных.

1.4. Про очаровательную раскраску известно, что цвет числа 2000 отличается от цветов всех меньших чисел. Сколькими (существенно различными) способами можно восстановить раскраску первых 1999 чисел?

Сюжет 2.

2.3. Из последовательности c_k выделили четыре различных числа, образующих арифметическую прогрессию. Приведите пример того, как такое могло быть.

2.4. Из последовательности c_k выделили сто различных чисел образующих арифметическую прогрессию. Докажите, что её разность больше 10^{30}.

Сюжет 3.

3.3. Точка $J \neq D$ на отрезке BD выбрана так, что $DE = JE$. Известно, что $\angle ABM = 90°$. Найдите отношение площадей треугольников ADJ и BEJ.

3.4. При каких значениях α может быть выполнено равенство $\angle MBN = \alpha = \angle ABC$?

Олимпиада Юношеской математической школы
II тур. 6 декабря 2015 года
9 класс

Сюжет 1.

Натуральные числа раскрашены в несколько (возможно, бесконечно много) цветов. Будем называть раскраску чисел очаровательной, если для любых натуральных чисел a и b среди чисел a, b и a+b встречается ровно одна одноцветная пара.

Натуральные числа покрасили очаровательно.

1.1. Докажите, что среди чисел 1, 3, 9 есть одноцветные.

1.2. Докажите, что среди четырёх последовательных чисел обязательно найдутся два одноцветных.

Сюжет 2.

Дан произвольный набор целых чисел. Обозначим через c_k сумму их k-ых степеней.

2.1. Из последовательности c_k выделили три различных числа, образующих арифметическую прогрессию. Докажите, что в исходном наборе есть числа разных знаков.

2.2. Возможно ли, что $c_3 = 1$, $c_5 = 2015$?

Сюжет 3.

Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает отрезок BC и луч AB в точках D и E соответственно. Точки M и N — середины отрезков AC и DE соответственно.

3.1. Оказалось, что $\angle BAC = 2\angle BCA$. Докажите, что $DM \le DB$.

3.2. Докажите, что $\angle ABC + \angle MBN = 180°$, если $AB = BE$.

Олимпиада Юношеской математической школы
II тур. 6 декабря 2015 года
9 класс. Выводная аудитория

Сюжет 1.

1.3. Приведите пример очаровательной раскраски, в которой среди чисел 6, 10 и 15 нет одноцветных.

1.4. Про очаровательную раскраску известно, что цвет числа 2000 отличается от цветов всех меньших чисел. Сколькими (существенно различными) способами можно восстановить раскраску первых 1999 чисел?

Сюжет 2.

2.3. Из последовательности c_k выделили четыре различных числа, образующих арифметическую прогрессию. Приведите пример того, как такое могло быть.

2.4. Из последовательности c_k выделили сто различных чисел образующих арифметическую прогрессию. Докажите, что её разность больше 10^{30}.

Сюжет 3.

3.3. Точка $J \neq D$ на отрезке BD выбрана так, что $DE = JE$. Известно, что $\angle ABM = 90°$. Найдите отношение площадей треугольников ADJ и BEJ.

3.4. При каких значениях α может быть выполнено равенство $\angle MBN = \alpha = \angle ABC$?