



Олимпиада Юношеской математической школы.
Второй тур. 6 декабря 2015. 11 класс

Сюжет 1. Рациональные многочлены

Будем для краткости называть *n*-рациональным многочленом многочлен степени *n* с рациональными коэффициентами, где *n* – натуральное число.

1. Укажите все *n*, при которых *n*-рациональный многочлен может иметь иррациональный корень.
2. При каком минимальном *n* существуют такие числа *a* и *b*, что каждое из них является корнем какого-то *n*-рационального многочлена, но их сумма *a+b* не является корнем никакого *n*-рационального многочлена?
3. При каком минимальном *n* существует *n*-рациональный многочлен $P(x)$, который положителен при всяком рациональном *x*, но имеет иррациональный корень?
4. Пусть *n*-рациональный многочлен $P(x)$ таков, что для любого натурального *y* найдётся рациональное число *x*, для которого $P(x)=y$. Какие значения может принимать *n*?

Сюжет 2. Волшебные кубики

Андрюша строит башенки из волшебных кубиков с ребром 1. Кубик можно поставить на другие кубики, если более половины площади его нижней грани касается других кубиков. Этажом называется множество всех кубиков, находящихся на определённой высоте. Этажи нумеруются снизу вверх.

1. Если на первом этаже 2 кубика, может ли на третьем быть 6?
2. Если на первом этаже 3 кубика, может ли на втором быть 5?
3. Если на первом этаже 1009 кубиков, может ли на втором быть 2016?
4. Андрюша построил двухэтажную башню, на втором этаже которой оказалось *m* кубиков. Но тут подошёл Боря, убрал весь второй этаж, а на первый этаж добавил ещё один кубик (не передвигая остальных кубиков первого этажа). Обязательно ли Андрюша, не изменяя первого этажа, сумеет теперь поставить *m+1* кубик на второй этаж?

Сюжет 3. Годные и негодные числа

Натуральное число называется *годным*, если оно делится на свою наибольшую цифру, и *негодным* в противном случае.

1. Существует ли бесконечная арифметическая прогрессия, состоящая из годных чисел?
2. Каких чисел больше среди первого триллиона натуральных чисел: годных или негодных?
3. Докажите, что среди любых 20 последовательных чисел найдётся как годное, так и негодное.
4. Какое максимальное количество негодных чисел может идти подряд?



Олимпиада Юношеской математической школы.
Второй тур. 6 декабря 2015. 11 класс

Сюжет 1. Рациональные многочлены

Будем для краткости называть *n*-рациональным многочленом многочлен степени *n* с рациональными коэффициентами, где *n* – натуральное число.

1. Укажите все *n*, при которых *n*-рациональный многочлен может иметь иррациональный корень.
2. При каком минимальном *n* существуют такие числа *a* и *b*, что каждое из них является корнем какого-то *n*-рационального многочлена, но их сумма *a+b* не является корнем никакого *n*-рационального многочлена?
3. При каком минимальном *n* существует *n*-рациональный многочлен $P(x)$, который положителен при всяком рациональном *x*, но имеет иррациональный корень?
4. Пусть *n*-рациональный многочлен $P(x)$ таков, что для любого натурального *y* найдётся рациональное число *x*, для которого $P(x)=y$. Какие значения может принимать *n*?

Сюжет 2. Волшебные кубики

Андрюша строит башенки из волшебных кубиков с ребром 1. Кубик можно поставить на другие кубики, если более половины площади его нижней грани касается других кубиков. Этажом называется множество всех кубиков, находящихся на определённой высоте. Этажи нумеруются снизу вверх.

1. Если на первом этаже 2 кубика, может ли на третьем быть 6?
2. Если на первом этаже 3 кубика, может ли на втором быть 5?
3. Если на первом этаже 1009 кубиков, может ли на втором быть 2016?
4. Андрюша построил двухэтажную башню, на втором этаже которой оказалось *m* кубиков. Но тут подошёл Боря, убрал весь второй этаж, а на первый этаж добавил ещё один кубик (не передвигая остальных кубиков первого этажа). Обязательно ли Андрюша, не изменяя первого этажа, сумеет теперь поставить *m+1* кубик на второй этаж?

Сюжет 3. Годные и негодные числа

Натуральное число называется *годным*, если оно делится на свою наибольшую цифру, и *негодным* в противном случае.

1. Существует ли бесконечная арифметическая прогрессия, состоящая из годных чисел?
2. Каких чисел больше среди первого триллиона натуральных чисел: годных или негодных?
3. Докажите, что среди любых 20 последовательных чисел найдётся как годное, так и негодное.
4. Какое максимальное количество негодных чисел может идти подряд?