Олимпиада Юношеской математической школы
II тур. 6 декабря 2015 года
10 класс

Сюжет 1.

Дан произвольный набор целых чисел. Для любого натурального числа k обозначим через c_k сумму их k-ых степеней.

1.1. Из последовательности c_k выделили три различных числа, образующих арифметическую прогрессию. Докажите, что в исходном наборе есть числа разных знаков.

1.2. Возможно ли, что $c_3 = 1$, $c_5 = 2015$?

1.3. Из последовательности c_k выделили четыре различных числа, образующих арифметическую прогрессию. Приведите пример того, как такое могло быть.

1.4. Из последовательности c_k выделили сто различных чисел, образующих арифметическую прогрессию. Докажите, что её разность по модулю больше 10^{30}.

Сюжет 2.

Во всех задачах O обозначает центр описанной окружности треугольника ABC, а I – центр его вписанной окружности.

2.1. Рассмотрим остроугольный треугольник ABC и его ортоцентр H. Оказалось, что точки B, O, H и C лежат на одной окружности. Докажите, что точка I лежит на той же окружности.

2.2. На описанной окружности треугольника ABC отметили точки X и Y — середины дуг AC и AB соответственно. Отрезок XY и сторона треугольника AC пересекаются в точке Z. Докажите, что $|IZ| > \frac{|AC| - |IC|}{2}$.

2.3. Дан неравнобедренный треугольник ABC с углом $\angle A = 60$. Докажите, что точка пересечения прямых OI и BC равноудалена от точек A и I.

2.4. Дан произвольный остроугольный треугольник ABC. X — какая-то точка внутри треугольника. Описанные окружности треугольников AOX, BOX и COX пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что X является центром вписанной окружности ABC тогда и только тогда, когда X — ортоцентр $A_1B_1C_1$.

Сюжет 3.

Натуральные числа раскрашены в несколько (возможно, бесконечно много) цветов. Будем называть раскраску чисел очаровательной, если для любых натуральных чисел a и b среди чисел a, b и $a+b$ встречается ровно одна одноцветная пара.

Натуральные числа покрасили очаровательно.

3.1. Докажите, что среди чисел 1, 3, 9 есть одноцветные.

3.2. Докажите, что среди четырёх последовательных чисел обязательно найдутся два одноцветных.

3.3. Приведите пример очаровательной раскраски, в которой числа 20 и 30 одного цвета.

3.4. Бессмертный Михаил каждый день придумывает новую очаровательную раскраску. Докажите, что есть очаровательная раскраска, которую он никогда не придумает.