Олимпиада Юношеской математической школы
II тур. 6 декабря 2015 года
8 класс.
Решения

1. Прямые, содержащие стороны некоторого четырехугольника, заданы уравнениями $y=ax+b$, $y=ax+c$, $y=dx+b$, $y=dx+c$. Найдите координаты точки пересечения диагоналей рассматриваемого четырёхугольника.

Решение. Очевидно, четырехугольник является параллелограммом. Две противоположные его вершины (соответствующие пересечениям пар прямых $y=ax+b$, $y=dx+b$ и $y=ax+c$, $y=dx+c$) имеют координаты $(0,b)$ и $(0,c)$, соответственно. Точка пересечения диагоналей параллелограмма находится на середине этой диагонали и имеет координаты $(0, (b+c)/2)$.

2. На 13-значном табло отображается число 1201201201201. Роботы C3PO и R2D2 по очереди переставляют его цифры. За ход можно переставить две соседние цифры, но запрещается менять цифры на тех позициях, на которых их кто-то из роботов уже менял. Кроме того, 0 нельзя ставить на первое место. Тот, кто не может сделать очередной ход – проиграл. Кто выиграет при правильной игре, если начинает C3PO?

Решение. Выиграет C3PO. Ему достаточно первым ходом поменять первый из нулей с двойкой. После этого в любом случае будет сделано еще 10 ходов – можно свободно производить перестановки во всех парах соседних позиций, кроме 2-й и 3-й (которые уже поменяли) и 1-й и 2-й (обмен которых приведет к постановке нуля в начало).

3. Назовём пару натуральных чисел правильной, если большее число пары делится на меньшее. Существуют ли 46 различных натуральных чисел, образующих ровно 1000 правильных пар?

Решение. Да. Например, числа $2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{45}$ образуют $45\cdot 44/2 = 990$ правильных пар. В качестве 46-го числа можно взять $3\cdot 2^{10}$, которое будет образовывать 10 правильных пар с остальными.

4. Можно ли заполнить все клетки бесконечной клетчатой плоскости различными натуральными числами так, чтобы числа в любой паре соседних по стороне клеток отличались не более чем на 2015?

Решение. Нельзя. Ясно, что в любом квадрате размера NxN числа отличаются не более, чем на $4029N$. При этом в нем записано N^2 различных чисел. При $N>4030$ такое невозможно.

5. Все углы равностороннего выпуклого пятиугольника различны. Докажите, что наибольший и наименьший из них – соседние.

Решение. Пусть в равностороннем выпуклом пятиугольнике ABCDE угол C – наименьший. Тогда $\angle C<\angle E$. Отсюда

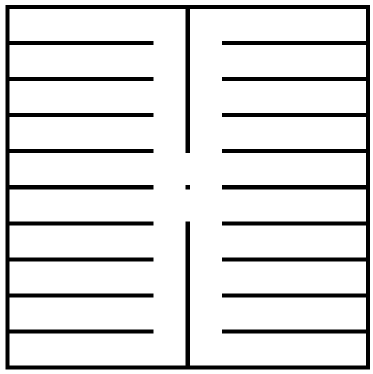
- из рассмотрения треугольников BCD и AED следует, что $BD<AD$, а тогда из треугольника ABD получаем, что угол BAD меньше угла ABD;
- из тех же треугольников BCD и AED следует, что угол EAD меньше угла CBD (это углы при основаниях двух равнобедренных треугольников, в которых $C<E$ - углы при вершинах).

Складывая неравенства, получаем, что угол ABC больше угла BAE. Таким образом, $\angle A$ не может быть наибольшим, так как $\angle B>\angle A$. Аналогичными рассуждениями можно получить, что ∠D>∠E, значит и ∠E не наибольший. Таким образом, наибольший угол пятиугольника – один из соседних с углом С.

6. Докажите, что при любом выборе 68 различных натуральных чисел, меньших 100, среди выбранных чисел найдется такое, которое равно сумме каких-то трех других выбранных.

Решение. Пусть $a < b$ – наименьшие два из 68 чисел, а $x_1 < x_2 < \ldots < x_{66}$ – остальные. Так как все числа различны, то $b < 34$. Рассмотрим 66 чисел вида $a+b+x_k$, а также все 68 чисел a, b, x_1, ..., x_{66}. Все они не меньше a и не больше $a+33+99$, поэтому различных среди них не больше, чем 133. Получили, что среди 134 рассмотренных чисел имеются не более 133 различных. Значит, какие-то два равны. Легко видеть, что это равенство дает нужное нам утверждение.

7. В каждой клетке доски 10х10 сидит по одному кролику. Между кроликами, находящимися в соседних по сторонам клетках, находятся перегородки, которые можно убирать. Какое наименьшее количество перегородок необходимо убрать, чтобы любой кролик смог сходить в гости к любому другому кролику, проходя по пути не более через 17 клеток (не считая начальной и конечной)?



Решение. Пример для 100 перегородок дан на рисунке. Правильность примера следует из того, что, как легко видеть, любой кролик может добраться до центрального квадрата из 4 клеток, пройдя не более, чем 8 клеток. Из центрального квадрата до любой клетки, соответственно, тоже можно дойти за 8 ходов. Еще не более, чем 2 хода требуют перемещения внутри центрального квадрата. Итого 8+2+8=18 клеток, считая конечную.

Покажем, что меньше ста перегородок убрать нельзя. Рассмотрим граф, вершинами которого являются клетки, а ребрами – отсутствующие перегородки. Поскольку граф связен, ребер в нем не менее 99-ти, и нам осталось лишь показать, что ровно 99 их быть не может. Допустим, что это так. Тогда граф является деревом. Мысленно разрежем доску на две половины: верхнюю и нижнюю. Тогда от клетки А1 до К1 (то есть от нижней левой до нижней правой угловой) должен существовать путь, лежащий в нижней половине – если он поднимется в верхнюю, он окажется длиннее требуемых 18 ребер. Аналогично путь от А10 до К10 должен лежать только в верхней половине, путь от А1 до А10 – только в левой половине, от К1 до К10 – в правой половине. Объединив эти пути и сократив рёбра, пройденные в две стороны, мы получим нетривиальный цикл (идём из левой нижней четверти в левую верхнюю, потом оттуда в правую верхнюю, затем в правую нижнюю и обратно), которого в дереве быть не может.

Критерии определения победителей и призёров заключительного этапа олимпиады Юношеской математической школы, 2015-16 гг.

Каждая задача стоит 1 балл.

По 4 классу:
Победителем считается участник, решивший 6 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 4 задач.

По 5 классу:
Победителем считается участник, решивший не менее 6 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 4 задач.

По 6 классу:
Победителем считается участник, решивший 7 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 5 задач.

По 7 классу:
Победителем считается участник, решивший 7 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 5 задач.

По 8 классу:
Победителем считается участник, решивший 6 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 4 задач.

По 9 классу:
Победителем считается участник, решивший 8 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 6 задач.

По 10 классу:
Победителем считается участник, решивший 9 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 5 задач.

По 11 классу:
Победителем считается участник, решивший 7 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 5 задач.