

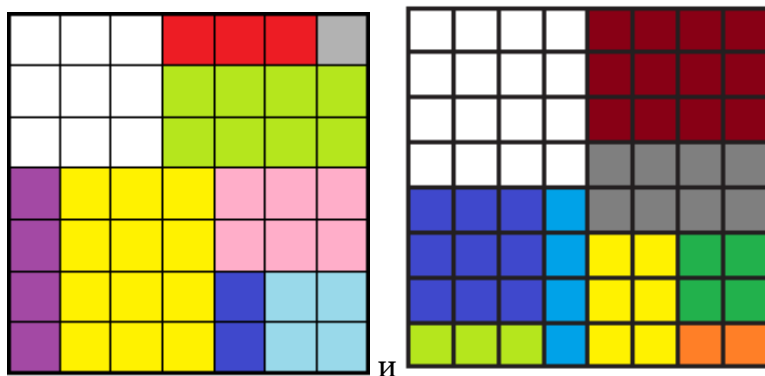
Решения:

1.

Да, например: 16, 34, 72, 579

2.

Сумма площадей всех прямоугольников равна 65. Площадь квадрата сама должна являться квадратом натурального числа. Максимальная площадь прямоугольника, который можно было потерять - 16. То есть Площадь квадрата может принимать значения от 49 до 64. Из всех чисел на этом промежутке квадратами являются только 49 и 64. Примеры:



3.

Ответ: Нет, не может.

Допустим противное. Посмотри на угловую клетку доски - конь из нее может попасть только в две клетки, следовательно должна найтись такая клетка, из которой ходом короля можно попасть только в 2 другие, но король всегда имеет не меньше трех вариантов хода - противоречие.

4.

Допустим противное. Выпишем все простые числа, меньшие 10:

2, 3, 5, 7. Среди 10 подряд идущих чисел всегда найдутся 5 нечетных, из них не больше двух может делиться на 3. На 5 и на 7 также не может делиться больше 1 нечетного числа. Следовательно, найдется как минимум одно нечетное число, которое не будет делиться ни на 3, ни на 5, ни на 7. Следовательно, это число заменят на что-то большее 10.

5.

Ответ: 10

Пример: Разобьем 2015 на 11 чисел 155 и одно число 310. в таком случае сумма слагаемых сможет принимать вид от $155 \cdot 1$ до $155 \cdot 10$.

Докажем, что нельзя получить меньше 10 различных чисел: сначала заметим, что 2015 не делится на 12 - то есть у нас будет хотя бы 2 различных числа. Упорядочим все числа по возрастанию. Сначала выберем только первое, потом только первое и второе, и так далее - в конце выберем первые 9 чисел - получили 9 разных сумм. Теперь возьмем последние 9 чисел - новая сумма превосходит все предыдущие, значит на доске оказалось не менее 10 различных чисел.

6.

Допустим противное. Изначально есть 100 камней, за один круг игроки забирают из кучек 24 камня, следовательно, весь процесс займет не более 4 кругов. За один круг из одной кучки исчезает не более 18 камней, значит перед ходом первого игрока на третьем круге в меньшей кучке было не менее, чем $50 - 36 = 14$ камней, а значит, после хода первого игрока процесс не закончится. Значит, прошло 3 полных круга, затем походил первый игрок, а потом второй игрок походить уже не смог. В тот момент в кучках оставалось всего 22 камня. Заметим, что когда один из игроков делает свой ход, то он изменяет разницу в количестве камней между ними на 4. Количество ходов было сделано четное, значит, разница в количестве камней делится на 8. Если в меньшей кучке камней меньше 1 камня, то условие с делимостью на 8 не выполняется. Следовательно, в меньшей кучке хотя бы два камня, а в большей - хотя бы 7, то есть второй игрок может походить.

7.

Заметим, что если в стране есть цикл из дорог, то король сможет путешествовать по нему бесконечно долго. Допустим, что циклов нет, тогда посмотрим на маршрут герцога. В некоторых месяцах 31 день, после 31-го идет первое число следующего месяца - то есть герцог будет 2 дня подряд ездить по дорогам с нарушением правил. При этом не бывает ситуации, когда герцог ездил бы 2 дня подряд без нарушений правил, то есть проехать обратно по этим двум дорогам он уже не сможет. Поскольку циклов нет, то и объехать эти дороги у него так же не получится, следовательно, каждый раз, когда в месяце будет нечетное количество дней, часть страны будет становиться для герцога недоступной, то есть когда-нибудь он придет в тупик - противоречие.