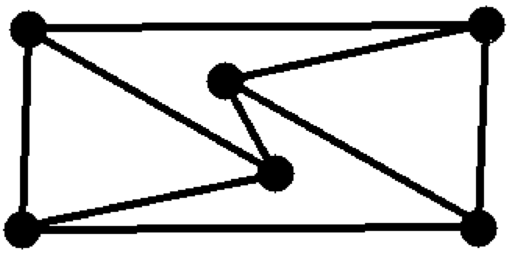
1. Допустим, первый житель солгал. В таком случае он является чатланином, как и все остальные в помещении. Однако, в такой ситуации второй житель также должен был сказать, что он пацак, а этого не произошло. Следовательно, первый – пацак. Его утверждение является верным, а значит среди оставшихся жителей есть хотя бы один чатланин. Двое чатлан остаться не могло, ведь в таком случае второй сказал правду, хотя должен был солгать. Стало быть в комнате остались представители обеих рас и второй сказал правду.

Ответ: Пацак, Чатланин, Пацак.

2. Заметим, что любое подходящее число является как минимум двухзначным, а так как цифр в нашем распоряжении всего девять, то единственный возможный вариант выбора чисел – три двухзначных и одно трёхзначное. Заметим, что для 36, 37, 38 и 39 среди двухзначных чисел существует ровно по два числа, которые бы на них делились (они сами, а также их удвоения – 72,74,76,78). Среди этих восьми двухзначных чисел выбрать можно не более двух, так как четыре из них имеют в разряде десятков “3”, а другие четыре – “7”. Таким образом, выбрать более двух двухзначных чисел нельзя. А необходимо три. Значит, так сделать нельзя.

Ответ: Невозможно.

3. Вариант картинки:



4. Очевидно, что числа, в записи которых есть “0” превратятся в ноль за один шаг. Посчитаем их количество. Количество чисел с одним нулём: 9*9*9*3=2187 (3 варианта выбрать положение нуля и по 9 вариантов выбрать каждую оставшуюся цифру). Чисел с двумя нулями: 9*9*3=216 (3 варианта расположения пары нулей и по 9 вариантов на каждую оставшуюся цифру). Чисел с тремя нулями: 9. Итого, 2187+216+9=2439.

Заметим, что если в числе есть пятёрка и какая-либо чётная цифра, то это число также обратится в ноль. Так как после первого шага появится ноль на конце. Посчитаем количество чисел с одной пятёркой и с хотя бы одной чётной цифрой. Их не менее 4*8*8*4=1024 (4 варианта выбрать место для пятёрки, 4 варианта выбрать чётную цифру и по 8 вариантов на оставшиеся две цифры).

Итого, мы получили уже 2439+1024=3463 числе, обращающихся в ноль. Это больше, чем треть от всего количества трёхзначных чисел (9000/3=3000).

5. Представим ABCD, как 1000A+100B+10C+D. Распишем также остальные числа и получим равенство: 1000A+100B+10C+D=78(10A+B+10B+C+10C+D). Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые получим: 220A=758B+848C+77D. Заметим, что левая часть не превышает 220*9=1980. B и C не равны нулю, так как двухзначное число (BC и CD) не может начинаться с нуля. Таким образом получается, что B и C меньше 2-ки, так как:

2*758+848=2364>1980 и 758+848*2=2454>1980.

Значит, B=C=1. То есть: 220A=758+848+77D, или 220A=1606+77D. Сократим равенство на 11, получим: 20A=146+7D. Отсюда, D делится на 2, а 7D должно оканчиваться на 4-ку. Это возможно только в случае D=2. Стало быть, единственный подходящий вариант: ABCD=8112.

Ответ: 8112

6. Так как у n-1 и n+1 только по 2 делителя, то это простые числа. А значит, n чётное, так как в противном случае получается, что n-1 и n+1 – два различных простых чётных числа, что невозможно. Среди любых трёх подряд идущих чисел существует одно, делящееся на 3. Если n-1 делится на 3, то оно равно 3 (так как оно простое), а тройка чисел выглядит так: 3,4,5, но у 4-ки всего 3 делителя – не подходит. Если n+1 делится на 3, то оно, аналогично, само является 3 и тройка чисел – 1,2,3, но 1 – не простое число. Значит, на 3 должно делиться n. Таким образом, n делится на 1, на 2, на 3 и на само себя. Но любое число, делящееся на 2 и 3, должно делиться на 6, следовательно n=6.

Ответ: 6

7. Если за столом сидят 298 человек, то различных троек подряд идущих людей также 298. Значит, имеется 149 троек, в которых больше чукч, и 149 троек, в которых больше алеутов. Оценим максимально возможное число чукч. Среди троек, где больше алеутов, их не может быть не более 1/3 (если чукчи будут стоять чаще, то получится тройка, с преобладанием чукч), то есть 49. Значит, алеутов должно быть минимум сто. Этот вариант достигается. Пример: 149 чукч, сидящих подряд, за которыми следуют тройки вида “алеут, алеут, чукча”

Ответ: 100

8. Заметим, что 1024, как и все его делители, является степенью двойки. Значит, каждым ходом любая кучка (большая 1) будет разбиваться на чётное количество новых куч. Тем самым, общее количество куч будет всегда увеличиваться на нечётное число. Значит, количество куч после хода первого игрока всегда чётно, а после хода второго – нечётно. Так как игра закончится, когда образуются 1024 кучки по 1 камню, то последний ход был сделан первым игроком. Значит, побеждает второй игрок, вне зависимости от стратегии.

Ответ: второй