Олимпиада Юношеской математической школы

II тур. 22 ноября 2015 года

6 класс. Основная аудитория.

Решения

1. Собрались как-то две эльфийки Илса и Елса, а также два гнома Билин и Дилин. Кто-то один из них подарил что-то их общему другу — человеку Василию, после чего каждый высказался:

— Подарком был меч.

— Я ничего не дарил!

— Илса подарила ожерелье.

— Билин подарил меч.

Известно, что эльфийки лгут, говоря о гномах, а гномы лгут, говоря о подарках. В остальных случаях все говорят правду. Определите, что было подарено и кем.

Решение. Фразу «Я ничего не дарил» не могла сказать эльфийка, значит, эту фразу сказал гном. Раз это фраза про подарок, то это ложь и именно этот гном что-то подарил Василию. Тогда фраза «Илса подарила ожерелье» — ложь, причем ее не могла сказать эльфийка. Получаем, что эту фразу сказал гном. Тогда первую и последнюю фразу сказали эльфийки. Первая истина, т.к. не про гномов, т.е. был подарен меч. Последняя про гнома, следовательно, ложь, т.е. меч подарил не Билин. Получаем, что меч подарил Дилин.

Комментарий. Подразумевается, что все (независимо от того, говорят они правду или лгут) произносят грамматически корректные фразы – например, эльфийка не может говорить о себе в мужском роде. Заранее объявлять детям это не нужно, но на вопросы отвечать.

2. Сто магов и сто алхимиков собрались вместе, чтобы превратить железо в золото. Каждый маг взял три волшебных палочки. Чтобы опыт прошёл успешно, сто человек из собравшихся должны сесть за круглый стол, а каждый сидящий за столом маг должен направить волшебные палочки на двух соседей и человека, сидящего точно напротив. Железо станет золотом только при выполнении двух условий:

1) среди всяких четверых людей, сидящих подряд, должно быть поровну магов и алхимиков;

2) каждый маг, сидящий за столом, должен направить свои волшебные палочки хотя бы на двух магов.

Сумеют ли маги и алхимики превратить железо в золото?

Решение. Из условия 1 следует, что если где-то рядом сидят, например, два мага, то вслед за ними должны сидеть два алхимика, потом снова два мага и т. д. Значит, алхимики и маги либо чередуются (...АМАМАМ...), либо сидят парами (...ААММААММ...). Второе условие в обоих случаях нарушается: либо у мага оба соседа алхимики, либо один из соседей и человек, сидящий напротив (50 не делится на 4, поэтому напротив алхимика сидит маг).

3. Даны девять натуральных чисел. Первое записано только единицами, второе — только двойками, …, девятое — только девятками. Может ли одно из этих чисел равняться сумме всех остальных?

Решение. Нет, поскольку в таком случае сумма всех чисел должна быть чётной, а она нечётна. Возможен также перебор по последней цифре.

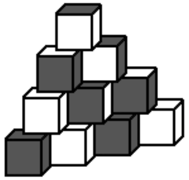
4. Итоги соревнований рыболовов подводятся по сумме баллов за три вида (поплавок, фидер, спиннинг), и в каждом виде разыгрываются три первых места, три вторых, три третьих и т.д. Первое место даёт 1 балл, второе два, и так далее (чем меньше баллов, тем выше результат). Какое самое низкое место мог занять участник, ставший первым в соревнованиях с поплавком, вторым в «фидере» и третьим в «спиннинге»?

Решение. Пусть его обошли N участников. Значит, каждый из них набрал сумму не большую чем 5. То есть все вместе они ($N+1$ человек) набрали сумму не большую чем $5N+6$. С другой стороны, в этой сумме возможны всего 9 единиц и 9 двоек, а остальные $(3N+3)-18$ результатов — не менее чем по 3, значит, эта сумма не меньше чем $9\cdot1+9\cdot2+(3N-15)\cdot3 = 9N-18$. Из двойного неравенства $9N-18 \le S \le 5N+6$ получаем $4N \le 24$, откуда $N \le 6$.

Значит, самое низкое возможное место — седьмое. Пример (единственный!): 3+1+1, 1+3+1, 1+2+2, 2+1+2, 2+1+2, 2+2+1.

6 класс. Выводная аудитория.

Решения



5. Денис покрасил некоторые грани своих кубиков в серый цвет. Вова отобрал 10 кубиков так, чтобы все они отличались по раскраске, после чего сложил их, как показано на рисунке. Сколько всего белых граней у верхнего кубика?

Решение. Для начала нужно перечислить все возможные варианты окраски куба. Их всего 10, а это значит, что все они встречаются. Заметим, что кубик вида «две противоположных грани серые, остальные белые» с любой стороны выглядит одинаково (как верхний кубик). Других кубиков, у которых видны две белых грани и одна чёрная, на картинке нет. Значит, это он и есть. У него 4 белых грани.

6. Клетчатый квадрат 3×3 заполнен числами от 1 до 9, как показано справа. Можно ли заполнить такими же числами еще два квадрата 3×3, чтобы выполнялось следующее условие: любые два числа могут быть соседними (по стороне) не более чем в одном из трёх квадратов?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Решение. Посчитаем количество «соседств». В каждом квадрате их 12, значит, в трёх — 36. Но у каждого числа их не более 8, значит, суммарно не более чем $9 \cdot 8/2 = 36$. Равенство означает, что каждая пара соседей где-либо встречается, т. е. у каждого числа ровно 8 соседей.

Число 5, находящееся в центре квадрата, уже имеет четырёх соседей. Значит, остальные четыре соседства у него должны быть на двух других квадратах — то есть оно оба раза должно быть в углах. Аналогично и для двух других центров квадратов: на первом квадрате эти числа должны быть в углу. То есть в других центрах могут стоять только числа 1, 3, 7 или 9. Но тогда 5 ни на одном из трех квадратов не будет соседним с теми из них, которые окажутся в центрах второго и третьего квадратов.

7. Из степени двойки вычеркнули одну цифру (не первую и не последнюю), затем сдвинули две части. Докажите, что результат не может оказаться другой степенью двойки.

Решение. Пусть исходное число равно N, а полученное — M. Если вычеркнутая цифра — не вторая и не третья, то M менее чем на 1% отличается от числа N/10, значит, оно больше N/8, но меньше N/16.

Если вычеркнутая цифра — не предпоследняя, то две последние цифры N и M совпадают. Однако две последние цифры у степеней двойки изменяются периодически с периодом 20, то есть M должно быть меньше N хотя бы в 2^{20} раз. Очевидно, это невозможно.

Значит, вычеркнутая цифра одновременно является второй-третьей и предпоследней, что возможно только для трёх-четырёхзначного N. Малые степени двойки (до 8192) легко проверить вручную.

Критерии определения победителей и призёров заключительного этапа олимпиады Юношеской математической школы, 2015-16 гг.

Каждая задача стоит 1 балл.

По 4 классу:
Победителем считается участник, решивший 6 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 4 задач.

По 5 классу:
Победителем считается участник, решивший не менее 6 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 4 задач.

По 6 классу:
Победителем считается участник, решивший 7 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 5 задач.

По 7 классу:
Победителем считается участник, решивший 7 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 5 задач.

По 8 классу:
Победителем считается участник, решивший 6 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 4 задач.

По 9 классу:
Победителем считается участник, решивший 8 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 6 задач.

По 10 классу:
Победителем считается участник, решивший 9 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 5 задач.

По 11 классу:
Победителем считается участник, решивший 7 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 5 задач.