Олимпиада Юношеской математической школы

II тур. 22 ноября 2015 года

5 класс. Основная аудитория.

Решения

1. Сегодняшняя дата записывается так: 22.11.2015. Назовите последнюю прошедшую дату, которая записывается тем же набором цифр.

Решение. В 2015 году более ранних таких дат нет. Предыдущий подходящий год — 2012-й, последний месяц в нём — 12, наибольшее возможное число — 15. Ответ: 15.12.2012.

2. На доске написано число. За ход можно либо увеличить или уменьшить любую его цифру на три (если при этом получится цифра), либо поменять две соседние цифры местами. Покажите, как за 11 ходов из числа 123456 получить число 654321.

Решение. За первые 5 ходов перемещаем 6 в начало: 612345. Далее меняем местами 1 и 2, 4 и 5, получаем 621354. Теперь 2 и 1 увеличиваем на три, а 5 и 4 уменьшаем на три – получается 654321.

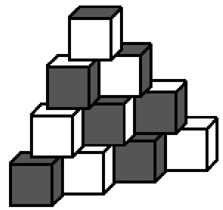
3. У группы малышей в детском саду 90 зубов на всех. У любых двух малышей вместе не больше 9 зубов. Какое наименьшее количество малышей может быть в группе?

Решение. Если у всех детей меньше 5 зубов, то детей не меньше 90/4, т.е. не меньше 23.
Если у одного ребёнка ровно 5 зубов, то у остальных не более 4, и детей не меньше 1+85/4, т.е. тоже не меньше 23.
Если у кого-то из детей от 6 до 9 зубов, то у остальных не более трёх, и детей больше, чем 81/3=27.
Таким образом, детей в любом случае не менее 23.
Примеры на 23 существуют (например, $5+1+21\cdot 4$ или $2+22\cdot 4$).

4. Даны девять натуральных чисел. Первое записано только единицами, второе — только двойками, …, девятое — только девятками. Может ли одно из этих чисел равняться сумме всех остальных?

Решение. Нет, поскольку в таком случае сумма всех чисел должна быть чётной, а она нечётна. Возможен также перебор по последней цифре.

5 класс. Выводная аудитория. **Решения**

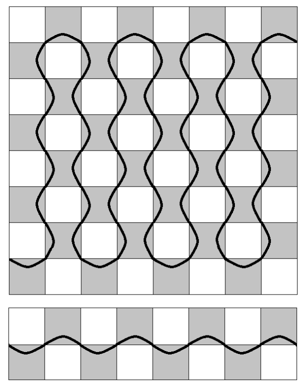


5. Денис покрасил некоторые грани своих кубиков в серый цвет. Вова отобрал 10 кубиков так, чтобы все они отличались по раскраске, после чего сложил их, как показано на рисунке. Сколько всего белых граней у верхнего кубика?

Решение. Для начала нужно перечислить все возможные варианты окраски куба. Их всего 10, а это значит, что все они встречаются. Заметим, что кубик вида «две противоположных грани серые, остальные белые» с любой стороны выглядит одинаково (как верхний кубик). Других кубиков, у которых видны две белых грани и одна чёрная, на картинке нет. Значит, это он и есть. У него 4 белых грани.

6. На костюмированном балу присутствовало 20 человек. В каждом танце участвовало двое — мальчик и девочка. Оказалось, что десятеро из них танцевали с тремя партнёрами, двое (Саша и Женя) — с пятью и остальные восемь — с шестью. Докажите, что Саша и Женя разного пола.

Решение. Заметим, что количество танцев, которые станцевали все, кроме Саши и Жени, кратно трём. Предположим, что Саша и Женя одного пола (например, оба мальчики). Тогда количество всех танцев, которые станцевали девочки, делится на 3, а количество танцев, которые станцевали мальчики, не делится. Поскольку эти количества должны совпадать, то такое невозможно.



7. Шахматную доску (8×8) разрезали на несколько равных частей так, что все белые клетки остались неразрезанными, а каждая чёрная клетка оказалась разрезана. Сколько частей могло получиться?

Решение. Заметим, что белых клеток 32, и в каждую часть входит целое количество белых клеток, поэтому ответ должен быть делителем 32.
Очевидно, он не может равняться 1. Ответы 2, 4, 8, 16 и 32 возможны. Для их получения нужно разрезать доску на прямоугольники 8×8, 8×4, 8×2, 4×2, 2×2, а каждый из них на две одинаковых части. Конструкции для двух прямоугольников показаны на рисунке; остальные аналогичны.

Условие и решение задачи 8 (супервывод) см. в варианте 6 класса (задача 6).

Критерии определения победителей и призёров заключительного этапа олимпиады Юношеской математической школы, 2015-16 гг.

Каждая задача стоит 1 балл.

По 4 классу:
Победителем считается участник, решивший 6 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 4 задач.

По 5 классу:
Победителем считается участник, решивший не менее 6 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 4 задач.

По 6 классу:
Победителем считается участник, решивший 7 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 5 задач.

По 7 классу:
Победителем считается участник, решивший 7 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 5 задач.

По 8 классу:
Победителем считается участник, решивший 6 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 4 задач.

По 9 классу:
Победителем считается участник, решивший 8 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 6 задач.

По 10 классу:
Победителем считается участник, решивший 9 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 5 задач.

По 11 классу:
Победителем считается участник, решивший 7 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 5 задач.