Решения.

Сюжет 1. 1. При n=1 двучлен $ax+b$ имеет корень -b/a, который рационален. При n>1 иррациональный корень возможен (например, для многочленов x^n-2 или $x^{n-2}(x^2$-2). Ответ: все n>1.

2. Для n=1 это неверно, т. к. сумма рациональных чисел рациональна, а любое рациональное число — корень какого-то 1-рационального многочлена. Для n=2 это верно, например, можно доказать, что $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ не имеет вида $a+b\sqrt{c}$, где a, b, c – рациональные числа. Ответ: n=2.

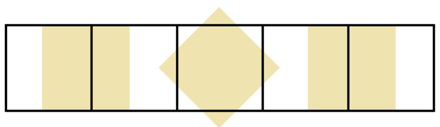
3. При нечётных n многочлен не может быть всюду неотрицателен. При n=2 описанное невозможно: речь идёт о квадратном трёхчлене с нулевым дискриминантом и рациональными коэффициентами, но его корень рационален (-$b/2a$). Минимальное из оставшихся n равно 4, для него такое бывает: $(x^2-2)^2$.

4. Очевидно, n может равняться 1. Докажем, что при n>1 это невозможно.

> Кратко: знаменатели подходящих рациональных чисел x ограничены => расстояние между соседними такими числами не меньше некой константы; а многочлен начиная с какого-то момента растёт очень быстро, и при изменении x на эту константу $P(x)$ «проскакивает» через несколько натуральных чисел.

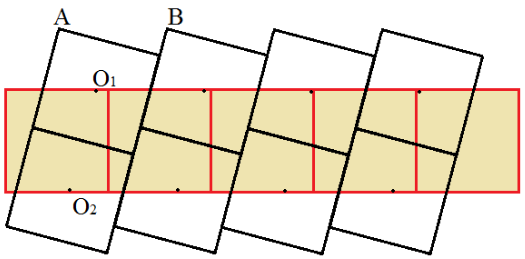
Заметим, что если $P(x)$ целое, то знаменатель рационального числа x ограничен (по модулю) неким числом m. В качестве m, например, можно взять произведение всех ненулевых числителей и знаменателей всех коэффициентов многочлена. Действительно, если знаменатель больше этого числа, то anxn имеет больший знаменатель, чем $a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, поэтому их сумма не может быть целой.
Это значит, что все «подходящие» рациональные числа имеют вид p/M, где M=НОК(1,...,m). Выберем такое R, что при x>R $|P'(x)|$>5M. Тогда окажется, что с увеличением $|x|$ на $1/M$ значение $P(x)$ растёт более чем на 5, а это значит, что многочлен принимает не все натуральные значения.

Сюжет 2. 1. Количество кубиков на каждом этаже увеличивается менее чем вдвое. Если на первом этаже 2 кубика, то на втором максимум 3, а на третьем максимум 5. Ответ: нет.



2. Может, см. рисунок.

3. И это возможно, см. рисунок. Можно выбрать угол так, что AB будет сколь угодно близко к 1; поскольку O_1O_2=1, то вертикальная проекция O_1O_2 меньше 1, и можно разместить оба центра на полоске (а значит, более половины каждого квадрата лежит на ней).



4. Рассмотрим квадрат $n\times n$ кубиков. Заметим, что на него можно положить не более чем $(n+2)^2$ кубиков: центры их нижних граней должны лежать внутри квадрата $n\times n$, поэтому сами грани целиком лежат внутри квадрата $(n+2)\times(n+2)$.

Теперь рассмотрим полосы этого квадрата, взятые через одну. Способом, указанным в пункте 3, на каждую из этих полос можно положить не менее 2n-4 кубиков (небольшое уменьшение оценки связано с тем, что кубики с соседних полос не должны накладываться друг на друга). Суммарно получится не менее n^2-2n кубиков.

Будем постепенно дополнять эти полосы до «полного квадрата» (в любом порядке). Заметим, что число кубиков первого этажа увеличилось не менее чем на $n(n$-1)/2, а максимально возможное число кубиков второго этажа — не более чем на 6n+4, что меньше (при больших n). Это значит, что при добавлении какого-то из кубиков на первый этаж максимальное количество кубиков на втором этаже не увеличилось.

Сюжет 3. 1. Да, например, 9, 99, 189...

2. Заметим, что среди первого триллиона натуральных чисел 10^{12}-9^{12} содержат в своей записи девятку, из них не более чем $10^{12}/9$ делятся на 9. Значит, по крайней мере N=10^{12} - 9^{12} - $10^{12}/9$ содержат девятку и не делятся на неё, т. е. негодные. Заметим, что N/10^{12}=1-0,9^{12} -1/9>1-1/9-0,7^3 > 1-0,12-0,45>1/2, т. е. таких чисел больше половины. Ответ: негодных больше.

3. Среди двадцати чисел два кончаются на 9; оба они делиться на 9 не могут, так что одно из них негодное.
Почему все 20 чисел не могут быть негодными? Заметим, что среди 20 чисел есть полный десяток (...0, ...1, …, ...9). Пусть k — максимальная цифра в первом из этих чисел (...0); тогда k — также максимальная цифра в числах ...1, ...2, …, ...k. Получается, что в (k+1) числах максимальная цифра равна k; ясно, что одно из них делится на k.

4. Ответ: 14.

Оценка. Если чисел хотя бы 10, то одно из них кончается на 0; из пункта 3 следует, что на 0 может кончаться не более одного числа. Обозначим это число x, и пусть k — его максимальная цифра.

Пусть k=9, причём число x содержит девятку в разряде сотен, тысяч или ещё более старшем. Тогда она присутствует во всех числах, т. е. их не более восьми.

Пусть k=9, причём x содержит девятку только в разряде десятков. Тогда числа имеют вид … ...87, ...88, ...89, ...90, ...91, ...92, ...93 … .Заметим, что одно из чисел ...84 и ...88 делится на 8, а одно из чисел ...89,... ...97 — на 9. Поэтому максимально возможный диапазон — ...85, … ...96 (всего 12 чисел).

Если k<9, то среди чисел x, x+1, … $x+k$-1 одно годное (делится на k), поэтому максимальное число — $x+k$-2. При k<8 из этого следует, что максимальное число не превосходит x+5. При k=8 это тоже верно, поскольку одно из чисел x, x+2, x+4, x+6 делится на 8. Далее, числа x-9, x-8, … x-1 не могут все быть негодными (по той же причине, что и «полный десяток»). Значит, диапазон не шире, чем x-8, …, x+5, то есть чисел не больше 14.

Пример. 71092, …, 71105 (71100 делится на 9, а 71099 делится на 7).

Критерии определения победителей и призёров заключительного этапа олимпиады Юношеской математической школы, 2015-16 гг.

Каждая задача стоит 1 балл.

По 4 классу:
Победителем считается участник, решивший 6 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 4 задач.

По 5 классу:
Победителем считается участник, решивший не менее 6 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 4 задач.

По 6 классу:
Победителем считается участник, решивший 7 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 5 задач.

По 7 классу:
Победителем считается участник, решивший 7 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 5 задач.

По 8 классу:
Победителем считается участник, решивший 6 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 4 задач.

По 9 классу:
Победителем считается участник, решивший 8 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 6 задач.

По 10 классу:
Победителем считается участник, решивший 9 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 5 задач.

По 11 классу:
Победителем считается участник, решивший 7 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 5 задач.