**Решения сюжета 1.**

**1.** Из чисел $c_k$ удалось выделить трехчленную арифметическую прогрессию. Докажите, что в наборе есть числа разных знаков.

Будем решать от противного. Пусть есть такой набор чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(\forall i : a_i > 0)$, что $c_{k_1}, c_{k_2}, c_{k_3}$ образуют непостоянную арифметическую прогрессию для каких-то $k_1 < k_2 < k_3$. Будем считать, что $a_i > 1$, так как если выкинуть из набора $a_i = 1$, то все $c_k$ уменьшатся на 1. Теперь заметим, что $c_{k_3} \geqslant c_{k_2+1} = \sum\limits_i a_i^{k_2} \cdot a_i \geqslant \sum\limits_i a_i^{k_2} \cdot 2 = 2 \cdot c_{k_3}$. Но тогда $c_{k_1} = 2 \cdot c_{k_2} - c_{k_1} \leqslant 0$, противоречие.

**2.** Возможно ли, что $c_3 = 1$, $c_5 = 2015$?

Заметим, что $\forall a : a^3 \equiv a^5 \pmod 3$. Следовательно, $c_3 \equiv c_5 \pmod 3$. Однако $1 \not\equiv 2015 \pmod 3$.

**3.** Приведите пример четырёхчленной арифметической прогрессии выделенной из чисел $c_k$.

Давайте рассмотрим числа $2, 3, 4$ в степенях $1, 3$, 5 и 7. Подберём такие $k_2$, $k_3$ и $k_4$, что если составить набор из $k_2$ чисел 2, $k_3$ чисел 3 и $k_4$ чисел 4, то $c_1$, $c_3$, $c_5$ и $c_7$ будут образовывать арифметическую прогрессию, то есть $c_7 - c_5 = c_5 - c_3 = c_3 - c_1$. При этом, если $k_i < 0$, то это означает $-k_i$ чисел, равных $-i$ (именно поэтому мы взяли нечётные степени). Чтобы подобрать такие $k_i$, потребуется решить такую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} k_2 \cdot (2^7 - 2 \cdot 2^5 + 2^3) + k_3 \cdot (3^7 - 2 \cdot 3^5 + 3^3) + k_3 \cdot (4^7 - 2 \cdot 4^5 + 4^3) = 0 \\ k_2 \cdot (2^5 - 2 \cdot 2^3 + 2^1) + k_3 \cdot (3^5 - 2 \cdot 3^3 + 3^1) + k_3 \cdot (4^5 - 2 \cdot 4^3 + 4^1) = 0 \end{cases}$$

Это однородная система из двух уравнений с тремя неизвестными. Очевидно, что можно подобрать подходящие рациональные $k_i$, а значит, можно и целые.

**4.** Из чисел $c_k$ удалось выделить 100-членную прогрессию. Докажите, что её разность больше $10^{30}$.

Пусть $c_{k_i}$ и $c_{k_j}$ — это $i$ и $j$ члены арифметической прогрессии, тогда их разность равна $(i-j)d$, где $d$ — разность арифметической прогрессии. При этом $c_{k_i} - c_{k_j} = \sum\limits_i a_i^{k_j} \cdot (a_i^{k_i - k_j} - 1)$. Если $k_i - k_j$ делится на $p-1$ для какого-то простого $p$, тогда, по теореме Ферма, $\forall i : a_i^{k_i - k_j} - 1 \vdots p$, и, следовательно, $c_{k_i} - c_{k_j} = (i-j)d \vdots p$. Если при этом $(i-j) \not\vdots p$, то $d \vdots p$. Давайте для каждого $p < 100$ найдём подходящие $i, j$. Если рассмотреть первые $p$ индексов $k_i$, среди них есть одинаковые по модулю $p-1$, и $i - j < p$. Значит, $d$ делится на произведение всех простых до 100, а оно что-то около $10^{33}$.

**Решения сюжета 2.**

**1.** Заметим, что выполняются равенства $\angle BOC = 2\angle A$, $\angle BHC = 180° - \angle A$, а так же, по условию, $\angle BOC = \angle BHC$. Следовательно, $2\angle A = 180° - \angle A$, то есть, $\angle A = 60°$. При этом $\angle BIC = \dfrac{\angle A}{2} + 90° = 120° = \angle BOC$.

**2.** Основная цель этой задачи — понять, что $XY$ является серпером к $AI$.

Например так: заметим, что $X$ и $Y$ — это пересечения прямых $BI$ и $CI$ с описанной окружностью $ABC$, где $I$ — центр вписанной окружности $ABC$. Тогда по лемме о трилистнике (трезубце), $IY = YA$, $IX = XA$. Из этого следует, что $XY$ — общая ось симметрии двух равнобедренных треугольников, т.е., действительно, серпер $AI$. Вместо трилистника можно, разумеется, воспользоваться более школьными соображениями (впрочем, его несложно и вывести случайно).

Естественный ход решения: нужно доказать, что $2|IZ| + |IC| > |AC|$. По неравенству треугольника $|IZ| + |IC| < |CZ|$. Осталось доказать, что $|IZ| \geqslant |ZA|$. Проделываем какие-то рассуждения (см. выше) и понимаем, что $|IZ| = |ZA|$.

**3.** Переформулируем условие: нужно доказать, что серпер к $AI$, прямая $BC$ и прямая $OI$ пересекаются в одной точке. С пунктами 1. и 2. эта задача становится совсем простой.

Мы уже знаем, что четырёхугольник $BIOC$ — вписанный, а точки пересечения серпера к $AI$ с описанной окружностью треугольника — это точки пересечения прямых $BI$ и $CI$ с описанной окружностью. Обозначим эти точки за $X$ и $Y$ соответственно. Заметим, что тогда четырёхугольник $XYOI$ тоже вписанный ($\angle XIY = 120°$, вертикальный уже посчитанному, $\angle XOY = 120°$, т.к. стягивает две половинки дуг в сумме равных 240).

Тогда серпер к $AI$ — радикальная ось описанных окружностей $XYOI$ и $ABC$, $BC$ — радикальная ось описанных окружностей $ABC$ и $BIOC$, $OI$ — радикальная ось описанных окружностей $XYOI$ и $BIOC$. Как известно, они действительно пересекаются в одной точке.

**4.** Замечание: рисовать точки со всеми тремя буквами на самом деле не нужно, можно ограничиться только одной буквой.

Докажем в одну сторону (если $X = I$, то $X = H$), в другую всё абсолютно аналогично, кроме самых последних переходов, которые делаются ещё проще, чем в этом доказательстве.

Пусть $A_2, B_2$ и $C_2$ — точки, симметричные относительно $O$ точкам $A$, $B$ и $C$ соответственно, $A_3, B_3$ и $C_3$ — точки пересечения описанной окружности треугольника $ABC$ и прямых $A_1X$, $B_1X$ и $C_1X$ соответственно.

Для лучшего понимания здесь можно сказать, что треугольник $ABC$ переходит в треугольник $A_2B_2C_2$ при повороте на $180^\circ$ относительно $O$ (или гомотетии с коэффициентом $-1$). Пусть при этом преобразовании точка $I$ переходит в некую точку $J$.

Докажем, что прямые $A_2A_3$, $B_2B_3$ и $C_2C_3$ параллельны прямой $OX$. Действительно, например, четырёхугольник $BB_1XO$ — вписанный, поэтому $\angle OBB_1 = \angle B_1XO$. Но на эту же дугу в описанной окружности $ABC$ опирается угол $B_2B_3B_1$.

Значит, при симметрии относительно перпендикуляра к $OX$, проходящего через точку $O$, треугольник $A_3B_3C_3$ переходит в треугольник $A_2B_2C_2$, а $I$ переходит в $J$.

Отсюда очевидным образом следует серия равенств углов, сохраняющихся при движениях плоскости, и, наконец, подобие треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_3B_3C_3$. $\angle A_3XB_3 = \angle A_2XB_2 = \angle AXB$, т.е. центр вписанной окружности $ABC$ совпадает с центром вписанной окружности $A_3B_3C_3$ (до этого мы вообще не пользовались тем, что $X$ — центр вписанной окружности).

Самое время нарисовать отдельно вписанные в одну окружность треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_3B_3C_3$ и точку $X$ — это в точности первый пункт, где мы уже понимали перпендикулярность соответствующих прямых (т.е. как раз то, что $X$ является точкой пересечения высот треугольника $A_1B_1C_1$.

**Решения сюжета 3.**

**1.** Докажите, что среди чисел 1,3,9 есть одноцветные.

Пусть числа 1, 3 и 9 трёх цветов $A$, $B$ и $C$ соответственно.

Среди чисел 1, 2 и 3 есть два одноцветных, значит, 2 цвета $A$ или $B$. Однако $1 + 1 = 2$, поэтому 1 и 2 разного цвета. Следовательно, 2 цвета $B$.
Среди чисел 1, 3 и 4 есть два одноцветных, значит, 4 тоже цвета $A$ или $B$. Однако $2 + 2 = 4$, поэтому 2 и 4 разного цвета. Следовательно, 4 цвета $A$.
$4 + 5 = 9$, значит, 5 цвета $A$ или $C$, однако $1 + 4 = 5$, значит, 5 не цвета $A$. Следовательно, 5 цвета $C$.
$1 + 5 = 6$, значит, 6 цвета $A$ или $C$, а $2 + 4 = 6$, значит, 6 цвета $A$ или $B$. Таким образом, 6 цвета $A$.
Итого, 3, 6 и 9 имеют цвета $B$, $A$ и $C$ соответственно. Противоречие.

**2.** Докажите, что среди четырех последовательных чисел обязательно найдутся два одноцветных.

Заметим, что если $k$ и $k + 1$ разных цветов, то 1 обязательно одного цвета с одним из них. Значит, числа $k$, $k + 1$, $k + 2$ и $k + 3$ различных цветов и 1 цвета $A$, то одно из чисел $k$ и $k + 1$ тоже цвета $A$, а также одно из чисел $k + 2$ и $k + 3$ цвета $A$. То есть, среди чисел $k, k + 1, k + 2, k + 3$ есть как минимум два цвета $A$. Противоречие.

**3.** Приведите пример очаровательной раскраски, в которой числа 20 и 30 одноцветные.

Раскрасим все числа, сравнимые с 1 и 4 по модулю 5, в цвет $A$, а сравнимые с 2 и 3 по модулю 5 — в цвет $B$. Рассмотрим равенство $a+b = c$. Легко проверить, что если ровно одно из чисел делится на пять, то остальные два одного цвета, а если все три не делятся на пять, то только два из них одного цвета. Таким образом, если числа, кратные пяти, покрасить очаровательно, то общая раскраска тоже будет очаровательной. Поделим все числа, кратные 5, на 5, и покрасим их по тому же правилу в света $C$ и $D$. Останутся числа, кратные 25. Их тоже покрасим по тому же правилу в цвета $E$ и $F$, и так далее. В этой очаровательной раскраске числа 20 и 30 оба цвета $F$.

**4.** Бессмертный Михаил каждый день придумывает новую очаровательную раскраску. Докажите, что есть очаровательная раскраска, которую он никогда не придумает.

Рассмотрим раскраску во предыдущей задаче. Заметим, что на самом деле, когда мы покрасили все числа, некратные пяти, числа кратные пяти можно покрссить любым очаровательным образом. Рассмотрим другую раскраску: раскрасим все нечётные числа в один цвет. Понятно, что из трёх чисел $a$, $b$ и $a + b$ либо два нечётных, либо ни одного. Поэтому достаточно очаровательно покрасить оставшиеся, чётные числа. Заметим, что ооставшиеся (в одном случае кратные пяти, в другом случае чётные) числа можно также красить по модулю пять или по модулю два. И так далее. Таким образом, существует бесконечное количество раскрасок, которые описываются бесконечными последовательностями из 2 и 5. Очевидно, что все эти раскраски различны и их несчётное количество.

**Критерии определения победителей и призёров заключительного этапа олимпиады Юношеской математической школы, 2015-16 гг.**

Каждая задача стоит 1 балл.

По 4 классу:
Победителем считается участник, решивший 6 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 4 задач.

По 5 классу:
Победителем считается участник, решивший не менее 6 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 4 задач.

По 6 классу:
Победителем считается участник, решивший 7 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 5 задач.

По 7 классу:
Победителем считается участник, решивший 7 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 5 задач.

По 8 классу:
Победителем считается участник, решивший 6 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 4 задач.

По 9 классу:
Победителем считается участник, решивший 8 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 6 задач.

По 10 классу:
Победителем считается участник, решивший 9 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 5 задач.

По 11 классу:
Победителем считается участник, решивший 7 задач.
Призёром считается участник, решивший не менее 5 задач.